

Thema

Darstellung von Hysterese-Operatoren mit stückweise monotaffinen Input-Funktionen durch Funktionen auf Strings

Habilitationsschrift

zur Erlangung der Lehrbefähigung
für das Fach

Mathematik

vorgelegt dem Rat der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt–Universität zu Berlin

von

Dr. rer. nat. Werner Olaf Klein

Prof. Dr. Jan-Hendrik Olbertz
Präsident
der Humboldt–Universität zu Berlin

Prof. Dr. Elmar Kulke
Dekan

Antragstellung auf Eröffnung des Habilitationsverfahrens:	27. März 2013
Eröffnung des Habilitationsverfahrens:	13. Mai 2013
Hochschulöffentliche Probevorlesung:	04. Juli 2013
Annahme der schriftlichen Habilitationsleistung:	18. November 2013
Öffentlicher Vortrag:	23. Januar 2014
Beschluss der Zuerkennung der Lehrbefähigung:	10. Februar 2014

Gutachter:

1. Prof. Alexander Mielke, Humboldt-Universität zu Berlin/WIAS Berlin
2. Prof. Pavel Krejčí, Tschechische Akademie der Wissenschaften Prag
3. Prof. Martin Brokate, Technische Universität München

¹In der elektronischen Version fehlen diese persönlichen Daten aufgrund der Vorgaben für die Veröffentlichung auf dem Dokumenten- und Publikationsserver der HU Berlin vom 16. April 2014 und vom 24. Juni 2014.

Dieses Material steht unter der Creative-Commons-Lizenz **Namensnennung - Keine Bearbeitungen** 3.0 Deutschland. Eine Kopie der Lizenzbedingungen finden sie unter <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/legalcode.de>.

Darstellung von Hysterese-Operatoren mit stückweise monotaffinen Input-Funktionen durch Funktionen auf Strings

Olaf Klein

1. Oktober 2014

Vorwort

Bei zeitabhängigen Prozessen in der Physik, der Biologie, der Wirtschaft und den Ingenieurwissenschaften kann man oft Gedächtniseffekte beobachten, d.h. wenn man untersucht, wie der Prozess auf einen bestimmten Wert für die Eingangsgröße reagiert, hängt das Resultat auch von den früheren Werten der Eingangsgröße ab. Diese Art von *hysteretischem Verhalten* tritt z.B. bei der Verformung elastoplastischer Körper, bei der Magnetisierung, beim Laden von Akkumulation oder bei der Einlagerung von Wasser im Erdboden auf.

Zur Modellierung derartiger Vorgänge werden häufig die sogenannten *Hysterese-Operatoren* verwendet, die zeitabhängige Funktion auf zeitabhängige Funktionen abbilden. Dabei sind die Operatoren *kausal*, d.h. der Wert der vom Hysterese-Operator gelieferten Bildfunktion zu irgendeinem Zeitpunkt hängt nur von früheren Werten der Eingangsfunktion ab. Weiterhin sind die Operatoren *ratenunabhängig*, d.h. eine zeitliche Umtransformation der Eingangsfunktion führt zu einer entsprechenden Umtransformation der Bildfunktion. Zu einer Einführung zum Thema Hysterese-Operatoren wird (**ohne** Anspruch auf Vollständigkeit) auf die Monographien [8, 15, 36, 37, 56, 70], auf [5, 38, 39, 71] und die dort zitierte Literatur verwiesen.

Bei der Modellierung muss man sich natürlich bewusst sein, dass es sich dabei im Allgemeinen nur um Näherungen handeln kann, da viele der betrachteten Vorgänge selber nicht ratenunabhängig sind (vgl. z.B. [16]), und somit die Modellierung mit einem Hysterese-Operator nur innerhalb eines bestimmten Parameterbereichs eine gute Näherung des echten Prozesses bilden kann. Dies soll in dieser Arbeit aber nicht weiter untersucht werden.

In [8] werden von M. Brokate und J. Sprekels Hysterese-Operatoren untersucht, die auf skalaren, stetigen, stückweise monotonen Funktionen definiert sind. Schreibt man für eine solche Funktion die lokalen Extrema nacheinander in einen String reeller Zahlen, d.h. in ein Tupel aus reellen Zahlen mit beliebiger Länge, so erhält man einen alternierenden String, d.h. ein Tupel reeller Zahlen, bei denen die Vorzeichen der Differenzen aufeinander folgender Paare alternieren.

Wenn man ein Funktional auf den alternierenden Strings betrachtet, und jetzt für alle Zeiten den alternierenden String mit den bisherigen lokalen Extrema und dem aktuellen Funktionswert als Input für dieses Funktional verwendet, liefert dies eine zeitabhängige Funktion.

Von M. Brokate und J. Sprekels wird in [8] nicht nur bewiesen, dass so ein Hysterese-Operatoren auf den skalaren, stetigen, stückweise monotonen Funktionen definiert wird, sondern sie zeigen auch das überraschende Resultat, dass sich **alle** Hysterese-Operatoren auf den skalaren, stetigen, stückweise monotonen Funktionen auf diese Art generieren

lassen.

Dies zeigt, dass der oben beschriebene Ansatz, die Vergangenheit einer Funktion auf ihre lokalen Extrema zu reduzieren, einen Datensatz liefert, der viel weniger Informationen beinhaltet als die Funktion selber, aber ausreichend ist, um für die Funktion den Hysterese-Operator auswerten zu können (vgl. auch [66]).

Diese Darstellung erlaubt es auch, Eigenschaften des Hysterese-Operators durch Eigenschaften der String-Funktion auszudrücken.

So kann man für einen Hysterese-Operator die *dritte Madelungsche Regel* betrachten, die besagt, dass der Operator das Durchfahren innerer Hysterese-Schleifen vergisst. Wie in [5, 8] ausgeführt wird, ist diese Regel für einen Hysterese-Operator genau dann erfüllt, wenn für das Funktional, das den Operator generiert, gilt, dass man bestimmte Paare von reellen Zahlen aus den String entfernen kann, ohne dass sich der Funktionswert ändert. Indem man für eine gegebene Input-Funktion für den String mit den lokalen Extrema Buch darüber führt, welche Paare auf diese Weise löschar waren, kann man abschätzen, zu welchem Schaden in einem Material eine Last-Oszillation in Form der Input-Funktion führen könnte, siehe [5, 8].

Weiterhin wird in [6, 19, 20, 21, 22, 23, 57, 69, 73] die String-Darstellung von Hysterese-Operatoren auf skalaren, stetigen, stückweise monotonen Funktionen verwendet.

In [53, 54] werden vektorielle PREISACH-Operatoren betrachtet, und dabei mit einer String-Darstellung gearbeitet. Es handelt sich dabei aber um eine String-Darstellung für einen Hysterese-Operator mit **skalaren** Input-Funktionen, welcher durch eine Reduktion aus einem vektoriellen PREISACH-Operator gewonnen wurde.

In dieser Arbeit wird nun ein Ansatz vorgestellt, um auch für Hysterese-Operatoren mit vektorielltem Input eine Darstellung durch Funktionen auf einer String-Menge zu ermöglichen.

Dabei wird zunächst eine neue Klasse von Funktionen eingeführt, welche die Rolle der monotonen Funktionen übernimmt, und zwar die Klasse der sogenannten *monotaffinen* Funktionen. Diese kann man so beschreiben, dass die Ausgabe einer monotonen Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} als Eingabe für eine affine Funktion von \mathbb{R} in den Vektorraum verwendet wird, und man so insgesamt eine monotaffine Funktion erhält.

Die Beobachtung, dass ein String reeller Zahlen genau dann ein alternierender String ist, wenn sich kein Eintrag des Strings als Konvexkombination seines Vorgängers und seines Nachfolgers schreiben lässt, erlaubt es, dies als Definition für *Konvexitätstripel-freie* Strings mit Elementen aus Vektorräumen zu formulieren.

Für Hysterese-Operatoren, die auf stetigen, stückweise monotaffinen Funktionen definiert sind, wird bewiesen, dass man diese mit einer Funktion auf den Konvexitätstripel-freien Strings identifizieren kann.

Damit reicht es, für eine stetige, stückweise monotaffine Input-Funktion die Positionen

zu speichern, an denen die Änderung der Funktion ihre Richtung ändert, um genügend Informationen über die Vergangenheit der Input-Funktion zu haben, um den Hysterese-Operator für diese Input-Funktion auswerten zu können.

Die Umformulierung der dritten Madelungschen Regel im vektoriellen Fall zu einer Eigenschaft der String-Funktion wird vorgestellt, und die in [56] formulierte Kongruenz für periodische Input-Funktionen wird ebenfalls als Eigenschaft der String-Funktion formuliert.

Weiterhin werden die in [8] vorgestellten *Level-Funktionen* auf den vektorwertigen Fall übertragen. Es wird gezeigt, dass der in [60, 62, 61] verwendete Begriff der *lokalen Isotonie* eines Operators äquivalent dazu ist, dass alle Level-Funktionen monotaffin sind.

Analog dazu, dass der in [8] aus dem String-Funktional generierte Hysterese-Operator auch für die meisten stückweise monotonen Funktionen definiert ist, ist der oben generierte Hysterese-Operator für die meisten stückweise monotaffinen Funktionen wohldefiniert.

Wenn man also mit einem Hysterese-Operator startet, der auf den stetigen Funktionen definiert ist, so kann man die String-Funktion bestimmen, die dieser Operator erzeugt, und mit dieser String-Funktion dann wiederum einen Hysterese-Operator generieren, der für diese stückweise monotaffinen Funktionen definiert ist.

Der generierte Operator liefert dann für diese Input-Funktionen gerade die in [62] beschriebene Bogenlängen-Erweiterung des ursprünglichen Hysterese-Operators zurück. Diese kann man so beschreiben, dass Sprungstellen der Input-Funktion vom Hysterese-Operator so behandelt werden, als wäre der Input dort zwischen den Grenzwerten affin gewesen.

Um auch Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen, stückweise stetigen Inputfunktionen behandeln zu können, die anders auf Sprungstellen reagieren, wird ein weiteres Darstellungsergebnisse vorgestellt.

Dazu betrachtet man Funktionen, die jeweils stückweise in den Intervallinneren monotaffin und stetig sind. Die Strings mit Elementen aus dem Vektorraum werden durch Quintupel-Strings ersetzt. Für jede Sprung- und Richtungswechselstelle wird ein solches Quintupel eingeführt. Dieses enthält den Funktionswert, den links- und den rechtsseitigen Grenzwert der Input-Funktion, und für jeden dieser Grenzwerte jeweils einen Wahrheitswert, der angibt, ob der Grenzwert in der Nähe der Sprung- bzw. Richtungswechselstellen angenommen wird oder nicht.

Dies erlaubt dann die Formulierung des zweiten Darstellungssatzes. Bei diesem werden die Hysterese-Operatoren betrachtet, die auf den Funktionen definiert sind, die stückweise im Intervallinnern stetig und monotaffin sind. Es wird bewiesen, dass jeder dieser Operatoren eindeutig von einer geeigneten Funktion auf den Quintupel-Strings generiert wird.

Der Inhalt der Habilitation:

- I) Im Teil I werden grundlegende Fakten zu Hysterese-Operatoren vorgestellt. Dabei ist, nach Ansicht des Autors, die im Lemma 2.1.7 formulierte Methode, einen Hysterese-Operator mit lokalem Gedächtnis in einen Hysterese-Operator mit der

Halbgruppeneigenschaft umzuwandeln, ein neues Resultat.

- II) Im Teil II werden Beispiele für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen präsentiert, die Madelungschen Regeln und ihre Umformulierung in die Kongruenz-Eigenschaft und die Existenz einer Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion formuliert. Weiterhin wird das von M. Brokate und J. Sprekels in [8] hergeleitete Darstellungsergebnis zusammen mit einigen Anwendungen vorgestellt.

- III) Im Teil III werden zunächst einige Hysterese-Operatoren mit vektoriellen Input-Funktionen vorgestellt. Dann werden Strings mit Vektorkomponenten, insbesondere die Konvexitätsstripel-freien Strings eingeführt.

Weiterhin werden stückweise affine Funktionen und ihr Zusammenhang mit Strings vorgestellt und die Funktionen auf den Strings, die mit Hilfe der stückweise affinen Funktion aus Hysterese-Operatoren generiert werden.

- IV) Im Teil IV werden die monotaffinen Funktionen eingeführt, und das erste neue Darstellungsergebnis bewiesen. Dieses zeigt, dass es für jeden Hysterese-Operator auf den stetigen, stückweise monotaffinen Funktionen eine Funktion auf den Strings gibt, die den Operator generiert, und dass dies gerade die im Teil III definierte Funktion ist. Weiterhin wird gezeigt, dass der Hysterese-Operator auch für fast alle stückweise monotaffinen Funktionen wohldefiniert ist. Dann wird das Darstellungsergebnis angewendet, um z.B. die Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Inputfunktion in eine Bedingung an die String-Funktion zu überführen. Ebenso werden hier die Level-Funktionen auf den vektoriellen Fall übertragen und auch die vektorielle Version der monotonen Löschung, der Madelungschen Löschung und des Vergessen dieser Löschungen formuliert.

Nach Anwendung der obigen Resultate auf einige Hysterese-Operatoren werden Bedingungen an die String-Funktion formuliert, die sicherstellen, dass der von ihr generierte Hysterese-Operator stetig zu einem Operator auf allen stetigen Funktionen fortgesetzt werden kann.

- V) Im Teil V werden einige Definitionen für unstetige Funktionen präsentiert und die Bogenlängen-Erweiterung von Hysterese-Operatoren, die von V. Recupero eingeführt wurde, vorgestellt. Dann wird die oben beschriebene Gleichheit der Erweiterungen gezeigt.
- VI) Zur Vorbereitung des zweiten Darstellungssatzes werden dann im Teil VI die oben beschriebenen Quintupel-Strings sowie stückweise im Intervallinneren affine Funktionen eingeführt.
- VII) Im Teil VII werden die stückweise im Intervallinneren stetigen und monotaffinen Funktionen eingeführt und dann bewiesen, dass sich Hysterese-Operatoren auf diesen Funktionen aus Funktionen auf den Quintupel-Strings generieren lassen. Die Bestimmung einiger Beispiele beendet die Darstellung der Resultate.

Es wird darauf hingewiesen, dass Teile des Darstellungsergebnisses für Hysterese-Operatoren mit stetigen, stückweise monotaffinen Inputfunktionen vom Autor schon in [29] angekündigt

und in [26] beschrieben wurden. Ein wesentlicher Teil der Resultate und die entsprechenden Beweise findet sich in der Publikation [27] des Autors.

Um Missverständnissen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, dass die Modulbeschreibungen [31, 30] für Vertiefungsmodule des Wahlpflichtbereiches des Institut für Mathematik der Humboldt–Universität zu Berlin vom Autor dieser Habilitation formuliert wurden, ebenso ein großer Teil der WIAS-Webseite [34] für Hysterese-Operatoren und ein Teil der WIAS-Webseite [35] für moderne Materialien.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
----------------	------------

Abbildungsverzeichnis	xvii
------------------------------	-------------

I. Grundlegendes zu Hysterese-Operatoren	1
---	----------

1. Definition von Hysterese-Operatoren	3
---	----------

1.1. Grundlegende Notationen	3
1.1.1. Funktionenräume und Eigenschaften von Funktionen	3
1.1.2. Operatoren	5
1.2. Ratenunabhängigkeit, Kausalität und Hysterese-Operatoren	7
1.3. Operatoren mit Anfangszustand und Operatoren mit der Halbgruppeneigenschaft	9
1.3.1. Operatoren mit Anfangszustand	9
1.3.2. Operatoren mit der Halbgruppeneigenschaft	10
1.4. Untersuchung von Hysterese-Operatoren mit sinnvollen Definitionsbereichen	11
1.5. Stetigkeit von Hysterese-Operatoren	11

2. Erzeugung von Hysterese-Operatoren aus anderen Hysterese-Operatoren	13
---	-----------

2.1. Hysterese-Operatoren und Verknüpfung mit Funktionen	13
2.1.1. Verknüpfung für Hysterese-Operatoren ohne Anfangszustand	13
2.1.2. Verknüpfung für Hysterese-Operatoren mit Anfangszustand	15
2.2. Verknüpfung von Hysterese-Operatoren	16
2.3. Fortsetzung lokal Lipschitz-stetiger Operatoren	17

II. Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen und das zugehörige Darstellungsergebnis	19
---	-----------

3. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen	21
--	-----------

3.1. Der RELAY-Operator	21
3.1.1. Der „normale“ RELAY-Operator	21
3.1.2. Skalarer außerschaltender RELAY-Operator	23
3.2. Skalarer STOP-Operator, skalarer PLAY-Operator und Variationen	25
3.2.1. Skalarer STOP-Operator	25
3.2.2. Skalarer PLAY-Operator	27

3.2.3.	Unterschiede der betrachteten Abhängigkeit vom Anfangszustand bei skalaren STOP- und PLAY-Operatoren in verschiedenen Publikationen	29
3.2.4.	Verallgemeinerter skalarer PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand	30
3.2.5.	Verallgemeinerter skalarer PLAY-Operator mit zustandsabhängiger Fließgrenze	31
3.3.	PRANDTL-ISHLINSKII-Operator	32
3.4.	Generalisierte PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren	33
3.5.	PREISACH-Operatoren	34
3.5.1.	Ursprüngliche Formulierung des PREISACH-Operators mit Hilfe von RELAY-Operatoren	34
3.5.2.	Formulierung des PREISACH-Operators unter Verwendung des PLAY-Operators	35
3.5.3.	Verallgemeinerter PREISACH-Operator mit verallgemeinertem skalaren PLAY-Operator wie im Abschnitt 3.2.4	36
3.5.4.	Operatoren vom PREISACH-Typ	37
4.	Madelungsche Regeln, Kongruenz-Eigenschaft und Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen	39
4.1.	Madelungsche Regeln und Kongruenz-Eigenschaft	39
4.1.1.	Übersicht über die Madelungschen Regeln	39
4.1.2.	Diskussion der ersten Madelungschen Regel	40
4.1.3.	Diskussion der zweiten und dritten Madelungschen Regel	42
4.1.4.	Kongruenz-Eigenschaft im Umkehrbereich der Input-Funktion	45
4.2.	Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen und additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen	45
4.2.1.	Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen für Hysterese-Operatoren ohne Anfangszustand	45
4.2.2.	Additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion für Hysterese-Operatoren ohne Anfangszustand	46
4.2.3.	Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion für Hysterese-Operatoren mit Anfangszustand	48
4.2.4.	Additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion für Hysterese-Operatoren mit Anfangszustand	48
5.	Das Darstellungsergebnis für Hysterese-Operatoren mit skalaren, stückweise monotonen Input-Funktionen und skalaren Output-Funktionen	51
5.1.	Vorbereitung der Formulierung des Darstellungsergebnisses in [8]	51
5.2.	Das Darstellungsergebnis in [8]	52
5.2.1.	Darstellungsergebnisse für Operatoren ohne Anfangszustand	52
5.2.2.	Darstellungsergebnisse für Operatoren mit Anfangszustand	55
5.3.	Anwendung des Darstellungsergebnisses	55
5.3.1.	Untersuchung der Halbgruppeneigenschaft eines Operators mit Hilfe des Funktionalen	55

5.3.2.	Madelungzyklus und die Entfernung der Mitte eines solchen	56
5.3.3.	Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen und additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen	57
5.4.	Beispiele für von Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen generierten Funktionen auf Strings	59
5.4.1.	Skalarer RELAY-Operator wie im Abschnitt 3.1.1	59
5.4.2.	Skalarer außenschaltender RELAY-Operator wie in Abschnitt 3.1.2 .	60
5.4.3.	Skalarer STOP-Operator wie im Abschnitt 3.2.1	60
5.4.4.	Skalarer PLAY-Operator wie im Abschnitt 3.2.2	61
5.4.5.	PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren wie im Abschnitt 3.3	61
5.4.6.	Generalisierter PRANDTL-ISHLINSKII-Operator wie im Abschnitt 3.4	62
5.4.7.	PREISACH-Operator mit RELAY-Operatoren wie im Abschnitt 3.5.1	62
5.4.8.	PLAY-PREISACH-Gedächtnis-Operator wie im Abschnitt 3.5.2 . . .	62
5.4.9.	Operatoren vom PREISACH-Typ wie im Abschnitt 3.5.4	62

III. Hysterese-Operatoren mit vektoriellen Input-Funktionen, Strings und die Funktion auf Konvexitätstripel-freien Strings, die von Hysterese-Operatoren auf stückweise affinen, vektoriellen Input-Funktionen definiert werden **63**

6.	Beispiele für Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen	65
6.1.	Vektorielle RELAY-Operatoren	65
6.1.1.	Vektorieller außenschaltender RELAY-Operator	65
6.1.2.	Vektorieller RELAY-Operator	65
6.1.3.	Elementarer RELAY-Operator im Umfeld des ROTATING MODELS	66
6.1.4.	Der RVM-BALL-RELAY-Operator	67
6.1.5.	Der außenschaltende RVM-BALL-RELAY-Operator	68
6.1.6.	Der RVM-RELAY-Operator	69
6.1.7.	Der außenschaltende RVM-RELAY-Operator	70
6.1.8.	Der LÖSCHNER-GREENBERG-RELAY-Operator für konvexe Mengen	70
6.1.9.	Verallgemeinerung des radialen Vektor-Modells durch Verwendung allgemeinerer Auswertungsfunktionen	72
6.1.10.	Verallgemeinerter vektorieller RELAY-Operator	73
6.2.	Vektorielle STOP- und PLAY-Operatoren und Variationen	75
6.2.1.	STOP- und PLAY-Operatoren mit konvexen charakteristischen Mengen auf Hilbert-Räumen	75
6.2.2.	Verallgemeinerter vektorieller PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand	77
6.3.	Vektorielle PREISACH-Operatoren	79
6.3.1.	Vektorielle PREISACH-Operatoren auf der Basis von RVM-BALL-RELAY-Operatoren aus Abschnitt 6.1.4	79

6.3.2. PREISACH-Operatoren mit verallgemeinerten vektoriellen PLAY-Operatoren mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand wie im Abschnitt 6.2.2	80
6.4. Multi-dimensionale PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren	80
7. Strings, Konvexitätstripel, Konvexitätstripel-freie Strings	83
7.1. Strings für allgemeine Mengen	83
7.2. Konvexitätstripel	84
7.3. Strings mit und ohne Konvexitätstripel	88
7.4. Madelungzyklus und die Entfernung eines solchen	97
8. Stückweise affine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings	101
8.1. Affine Funktionen	101
8.2. Der Raum der stückweise affinen Funktionen	103
8.3. Verbindung zwischen stückweise affinen Funktionen und Strings	105
8.4. Madelungzyklus, Entfernung der Mitte von Madelungzyklen und zugehörige Funktionen	107
9. Hysterese-Operatoren auf dem Raum der stückweise affinen Funktionen und String-Funktionen	109
9.1. Definition der von Hysterese-Operatoren ohne Anfangszustand generierten Funktionen auf Strings	109
9.2. Definition von Funktionen auf Strings für Operatoren mit Anfangszustand	113
IV. Monotaffine Funktionen, das Darstellungsergebnis für Hysterese-Operatoren, die auf stetigen, stückweise monotaffinen Funktionen definiert sind, und Anwendungen des Resultats	115
10. Stückweise monotaffine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings mit und ohne Konvexitätstripel	117
10.1. Monotaffine Funktionen: Definition	117
10.2. Stückweise monotaffine Funktionen und Monotaffinitäts-Zerlegungen	124
10.3. Verbindung zwischen stückweise monotaffinen Funktionen und Strings . . .	130
11. Hysterese-Operatoren für stückweise monotaffine Funktionen und ihre Erzeugung mit Hilfe von Funktionen auf Konvexitätstripel-freien Strings	135
11.1. Der Gedächtnis-Hysterese-Operator für stückweise monotaffine Input-Funktionen mit Standard-Monotaffinitäts-Zerlegungen	135
11.2. Der Darstellungssatz für Hysterese-Operatoren für stetige, stückweise monotaffine Input-Funktionen	139
11.3. Übertragung des Darstellungsergebnisses auf Hysterese-Operatoren mit Anfangszuständen	141
11.4. Auswertung der Fortsetzung einer Funktion von $S_F(X_1)$ auf $S(X_1)$	141

12. Anwendungen des Darstellungssatzes für Hysterese-Operatoren	143
12.1. Übertragung von Definitionen aus dem skalaren Fall	143
12.1.1. Madelung'sche Regeln	143
12.1.2. Kongruenz-Eigenschaften im Umkehrbereich und Aktualisierungsfunktionen	145
12.2. Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereich der Input-Funktion	145
12.3. Kongruenz, Madelung'sche Regel und Aktualisierungsfunktionen	148
12.3.1. Beschreibung von Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen	148
12.3.2. Umformulierung der abgeschwächten Form der ersten Madelung'schen Regel	151
12.3.3. Umformulierung der Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion	151
12.4. Level-Funktionen	154
12.4.1. Definition von Level-Funktionen	154
12.4.2. Level-Funktionen und Aktualisierungsfunktionen	157
12.5. Vergessen von Entfernungsvorgängen	157
12.5.1. Vergessen des Entfernens von Konvexitätstripelmitten	157
12.5.2. Vergessen des Entfernens von Madelung-Zyklen	158
13. Beispiele für von Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen generierten Funktionen auf Strings	159
13.1. Vektorielle RELAY-Operatoren	159
13.1.1. Die String-Darstellung des verallgemeinerten vektoriellen RELAY-Operator aus Abschnitt 6.1.10	159
13.1.2. Weitere vektorielle RELAY-Operatoren	167
13.2. Vektorielle STOP- und PLAY-Operatoren und Variationen wie im Abschnitt 6.2	170
13.2.1. STOP- und PLAY-Operatoren mit konvexen charakteristischen Mengen auf Hilbert-Räumen	170
13.2.2. Verallgemeinerter vektorieller PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand, wie im Abschnitt 6.2.2	171
13.3. Vektorielle PREISACH-Operatoren auf der Basis von RVM-BALL-RELAY-Operatoren wie in Abschnitt 6.3.1	172
13.4. Weitere Operatoren	173
14. Fortsetzung von Hysterese-Operatoren für stetige, stückweise monotaffine Funktionen	175
V. Hysterese-Operatoren mit unstetigen Input-Funktionen und die Bogenlängen-Erweiterung von Hysterese-Operatoren	177
15. Unstetige Funktionen und Funktionen von beschränkter Variation und ihre Bogenlängen Parametrisierung	179
15.1. Grundlegendes zu Funktionen mit Unstetigkeiten	179

15.2. Funktionen von beschränkter Variation	180
16. Bogenlängen-Erweiterung von Hysterese-Operatoren	185
16.1. Bogenlängen-Reparametrisierung von Funktionen mit beschränkter Variation	185
16.2. Erweiterung von Hysterese-Operatoren auf BV-Funktionen auf der Basis der Bogenlängen-Reparametrisierung	186
16.3. Zusammenhang zwischen der Bogenlängen-Erweiterung und dem Operator auf unstetigen Funktionen in Def. 11.1.3	187
16.4. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit unstetigen Input-Funktionen, die nicht von Funktionen auf Konvexitätstripel-freien Strings generiert werden	191
16.4.1. Papierschnipsel und ein klebriges punktförmiges Hindernis	191
16.4.2. Der außenschaltende RVM-BALL-RELAY-Operator aus Abschnitt 6.1.5 erweitert auf unstetige Input-Funktionen	192
VI. Quintupel-Strings und stückweise in Intervallinneren affine Funk- tionen	195
17. Quintupel-Strings mit und ohne CTC-Tripel	197
17.1. CTC-Tripel	197
17.2. Quintupel und entsprechende CTC-Tripel	199
17.3. Quintupel-Strings und CTC-Tripel-freie Quintupel-Strings	200
18. Stückweise im Intervallinneren affine Funktionen, Hysterese-Operatoren auf dem entsprechenden Funktionenraum und die von ihnen generierten Funktio- nen auf Quintupel-Strings	207
18.1. Im Inneren von Intervallen affine Funktionen	207
18.2. Der Raum der Funktionen, die stückweise affin im Intervallinneren sind . .	209
18.3. Verbindung zwischen stückweise im Intervallinneren affinen Funktionen und Quintupel-Strings	211
18.4. Durch Hysterese-Operatoren generierte Funktionen auf Quintupel-Strings .	221
VII. Im Intervallinneren stückweise monotaffine und stetige Funktio- nen und das Darstellungsergebnis für Hysterese-Operatoren mit derartigen Input-Funktionen	225
19. Stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Funktionen und der Zusammenhang mit Quintupel-Strings	227
19.1. Im Intervallinneren monotaffine Funktionen	227
19.2. Stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Funktionen	233
19.3. Verbindung zwischen stückweise im Intervallinneren monotaffinen und ste- tigen Funktionen und Quintupel-Strings	239

20. Hysterese-Operatoren für stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Input-Funktionen und ihre Erzeugung mit Hilfe von Funktionen auf CTC-Tripel-freien Strings	245
20.1. Der Gedächtnis-Operator für stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Funktionen	245
20.2. Generierte Hysterese-Operatoren für stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Funktionen	259
20.3. Beispiele für generierte Funktionen	262
20.3.1. Die BV-Erweiterung auf Basis der Bogenlängen-Reparametrisierung wie im Abschnitt 16.2	262
20.3.2. Papierschnipsel und ein klebriges punktförmiges Hindernis wie in Abschnitt 16.4.1	262
20.3.3. Der RVM-BALL-RELAY-Operator erweitert auf unstetige Input-Funktionen wie im Abschnitt 16.4.2	263
20.3.4. Weitere Beispiele	264
 VIII. Literaturverzeichnis und Danksagung	 265

Abbildungsverzeichnis

3.1.	Das Input-Output Verhalten des RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}$	22
3.2.	Das Input-Output Verhalten des außenschaltenden RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}$	23
3.3.	Vergleich des Input-Output Verhalten des RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}[-1, u]$ (links) und des außenschaltenden RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[-1, u]$ (rechts) für $u(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos(20\pi t/T)$	25
3.4.	Das Input-Output Verhalten des STOP-Operators \mathcal{S}_r	26
3.5.	Das Input-Output Verhalten des PLAY-Operators \mathcal{P}_r	27
3.6.	Die RELAY-Operatoren $\mathcal{R}_{v-r, v+r}[w_0(r, v), u](t)$, so dass (v, r) über dem Graphen des $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, \cdot)$ liegt, haben dem Wert -1 , diejenigen, für die (v, r) unter dem Graphen liegt, haben den Wert $+1$	35
4.1.	Beispiel für die Madelungschen Regeln, folgt [8, Fig. 2.5]	40
4.2.	Eine Funktion, die auf $[t_1, t_4]$ und auf $[t_4, t_7]$ jeweils einen Madelungzyklus beschreibt	43
6.1.	Werte des RVM-BALL-RELAY-Operators. (Darstellung ist inspiriert von [54])	68
8.1.	Beispiel für $u = \pi_{\text{pw.af.}}[V]$ mit $V = (v_0, \dots, v_6)$, so dass (v_2, v_3) die Mitte eines Madelungzyklus ist.	108
8.2.	Beispiel für $w = \pi_{\text{pw.af.}}[W]$, wobei W aus V wie in Fig. 8.1 durch die Entfernung der Mitte (v_2, v_3) eines Madelungzyklus gebildet wird.	108
12.1.	Zwei Input-Funktionen u und v , die nach unterschiedlichem Anfang die gleiche geschlossene Kurve beschreiben	146
12.2.	Die Output-Funktionen $\mathcal{H}[u]$ und $\mathcal{H}[v]$, die nach unterschiedlichem Anfang und einem unterschiedlichen Bild für die erste Input-Periode (gestrichelt) ab der zweiten Input-Periode die gleiche geschlossene Kurve beschreiben . .	147

Teil I.

Grundlegendes zu Hysterese-Operatoren

1. Definition von Hysterese-Operatoren

1.1. Grundlegende Notationen

In diesem Abschnitt¹ sei $T > 0$ eine feste Endzeit.

Im Folgenden werden in diesem Abschnitt grundlegende Definitionen vorgestellt, die im wesentlichen allgemein bekannt sind.

1.1.1 Bemerkung. Ausgehend von den englischen Bezeichnungen, wie sie auch in der deutschen EDV verwendet werden, werden folgende Bezeichnungen bei Betrachtungen zu Operatoren verwendet:

- a) Eine Funktion, auf die der Operator angewendet wird, die also als Eingangsfunktion für den Operator verwendet wird, wird als *Input-Funktion* bezeichnet.
- b) Die Funktion, welche sich als Ausgabe des Operators zu einer Input-Funktion ergibt, wird als *Output-Funktion* bezeichnet.

1.1.1. Funktionenräume und Eigenschaften von Funktionen

1.1.2 Definition. Es seien nichtleere Mengen X und B gegeben. Dann ist

$$\text{Map}(B; X) := \{f \mid f : B \rightarrow X\}. \quad (1.1.1)$$

1.1.3 Bemerkung. Für eine nichtleere Menge X ist somit

$$\text{Map}([0, T], X) := \{f \mid f : [0, T] \rightarrow X\}. \quad (1.1.2)$$

1.1.4 Definition. Im Folgenden steht \mathbb{R} für die Menge aller reellen Zahlen, $\mathbb{N}_{\geq 1}$ für die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen **ohne** die 0 und \mathbb{N}_0 für die Menge $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{0\}$.

Die folgende Definition entspricht, bis auf dem letzten Punkt, [8, Defn. 2.2.2.]:

1.1.5 Definition. Es seien ein nichtleerer Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

- a) Man nennt α *monoton steigend*, wenn für alle $s, t \in I$ mit $s < t$ gilt: $\alpha(s) \leq \alpha(t)$.
- b) Man nennt α *streng monoton steigend*, wenn für alle $s, t \in I$ mit $s < t$ gilt: $\alpha(s) < \alpha(t)$.

¹Zur Erhöhung der Lesbarkeit beim fortlaufenden Lesen werden in dieser Arbeit wiederholt benutzte Voraussetzungen am Anfang eines Abschnittes bzw. eines Unterabschnittes aufgeführt. Dabei werden jeweils **alle** gemeinsam genutzten Voraussetzungen aufgelistet, und es wird darauf verzichtet, auf verschiedenen Ebenen aufeinander aufbauende Sätze von Voraussetzungen zu formulieren.

1. Definition von Hysterese-Operatoren

- c) Man nennt α *monoton fallend*, wenn für alle $s, t \in I$ mit $s < t$ gilt: $\alpha(s) \geq \alpha(t)$.
- d) Man nennt α *streng monoton fallend*, wenn für alle $s, t \in I$ mit $s < t$ gilt: $\alpha(s) > \alpha(t)$.
- e) Man nennt α *monoton*, wenn α monoton steigend und/oder monoton fallend ist.
- f) Man nennt α *streng monoton*, wenn α streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist.
- g) Man nennt α *nicht konstant auf I* , oder auch *auf I nicht konstant*, wenn es $s, t \in I$ mit $\alpha(s) \neq \alpha(t)$ gibt.²

1.1.6 Warnung. Es sei darauf hingewiesen, dass in Teilen der Literatur, wie z.B. in [36, 37], und auch in einigen Veröffentlichungen [33, 25] des Autors, die entsprechenden englischen Begriffe etwas anders definiert sind. Eine Funktion, die dort als “increasing function” bezeichnet wird, ist hier eine streng monotone steigende Funktion; eine “non-decreasing function” ist hier eine monoton steigende Funktion; eine “non-increasing function” ist hier eine monoton fallende Funktion und eine “decreasing function” ist eine streng monoton fallende Funktion.

In dieser Arbeit werden nur reelle Vektorräume betrachtet. Wie in [64, 1.6] sei

1.1.7 Definition. Ein reeller Vektorraum X wird als *topologischer Vektorraum* bezeichnet, wenn auf X eine Topologie definiert ist, so dass:

- a) Für alle $x \in X$ gilt, dass $\{x\}$ eine abgeschlossene Menge ist.
- b) Die Vektoraddition ist eine stetige Abbildung von $X \times X$ nach X .
- c) Die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor liefert eine stetige Abbildung von $\mathbb{R} \times X$ nach X .

1.1.8 Bemerkung. Nach [64, The. 1.12] ist jeder topologische Vektorraum ein Hausdorff-Raum.

1.1.9 Definition. a) Für einen topologischen Vektorraum X ist

$$C([0, T]; X) := \{f : [0, T] \rightarrow X \mid f \text{ ist stetig}\}. \quad (1.1.3)$$

b) Es ist

$$C[0, T] := C([0, T]; \mathbb{R}). \quad (1.1.4)$$

1.1.10 Definition. a) Es sei $\text{Map}[0, T]$ die Menge aller Funktionen von $[0, T]$ nach \mathbb{R} , d.h.

$$\text{Map}[0, T] := \text{Map}([0, T], \mathbb{R}) = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}\}. \quad (1.1.5)$$

² Es ist dabei erlaubt, dass es $s', t' \in I$ mit $s' \neq t'$ und $\alpha(s') = \alpha(t')$ gibt, oder dass es $s^*, t^* \in I$ mit $s^* < t^*$ gibt, so dass α auf $[s^*, t^*]$ konstant ist.

- b) Eine Abbildung $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine *stückweise monotone Funktion*, wenn es $t_0, t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt, so dass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ist, und für alle $i = 1, \dots, n$ die Einschränkung von v auf $[t_{i-1}, t_i]$ eine monotone Funktion ist.
- c) Es sei $\text{Map}_{\text{pm}}[0, T]$ die Menge aller stückweise monotonen Funktionen von $[0, T]$ nach \mathbb{R} und es sei $C_{\text{pm}}[0, T]$ die Menge aller stetigen, stückweise monotonen Funktionen von $[0, T]$ nach \mathbb{R} , d.h.

$$\text{Map}_{\text{pm}}[0, T] := \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ ist stückweise monoton}\}, \quad (1.1.6)$$

$$C_{\text{pm}}[0, T] := \{u \in \text{Map}_{\text{pm}}[0, T] \mid u \text{ ist stetig}\}. \quad (1.1.7)$$

Der Projektionssatz (siehe z.B. [1, Satz 2.19]) liefert, dass die folgende Definition wohldefiniert ist:

1.1.11 Definition. Es sei K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Hilbert-Raums H mit Norm $\|\cdot\|_H$. Dann ist die *Projektion von H auf K* die eindeutig definierte Abbildung $\text{Proj}_K : H \rightarrow K$, so dass für alle $x \in H$ gilt:

$$\|x - \text{Proj}_K(x)\|_H \leq \|x - y\|_H, \quad \forall y \in K. \quad (1.1.8)$$

1.1.12 Definition. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist für alle $x \in X$ und $r \geq 0$

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}. \quad (1.1.9)$$

1.1.2. Operatoren

1.1.13 Definition. Es seien nichtleere Mengen X und Y gegeben. Eine Abbildung \mathcal{H} , die jedes Element einer **nichtleeren** Teilmenge $D(\mathcal{H})$ von $\text{Map}([0, T], X)$ jeweils auf ein Element von $\text{Map}([0, T], Y)$ abbildet, bezeichnen wir im Folgenden als *Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$* oder als *Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq \text{Map}([0, T], X)$* . Für $u \in D(\mathcal{H})$ wird mit $\mathcal{H}[u] \in \text{Map}([0, T], Y)$ die Funktion bezeichnet, auf die u abgebildet wird, und für $t \in [0, T]$ wird mit $\mathcal{H}[u](t)$ der Wert der Funktion $\mathcal{H}[u]$ zur Zeit t bezeichnet.

Die folgende Definition ist inspiriert von [8, (2.2.12)] und [70, Kap. III.1, S.60, (1.4)].

1.1.14 Definition. Es seien eine nichtleere Menge X und ein $s \in [0, T]$ gegeben.

- a) Der *Abschneideoperator* $\mathcal{C}_s : \text{Map}([0, T], X) \rightarrow \text{Map}([0, T], X)$ ist definiert durch

$$\mathcal{C}_s[u](t) := u(\min(s, t)) = \begin{cases} u(t), & \text{wenn } t \leq s, \\ u(s), & \text{wenn } s \leq t. \end{cases} \quad (1.1.10)$$

- b) Der *Verschiebungsoperator* $\mathcal{M}_s : \text{Map}([0, T], X) \rightarrow \text{Map}([0, T], X)$ ist definiert durch

$$\mathcal{M}_s[u](t) := u(\min\{T, t + s\}) = \begin{cases} u(t + s), & \text{wenn } t \leq T - s, \\ u(T), & t > T - s. \end{cases}$$

1. Definition von Hysterese-Operatoren

Im Folgenden sollen im Wesentlichen nur Operatoren betrachtet werden, bei denen Eigenschaften wie Ratenunabhängigkeit oder Kausalität nicht aufgrund speziell konstruierter Definitionsbereiche gelten. Daher die folgende Definition:

1.1.15 Definition. Seien X und Y nichtleere Mengen.

- a) Es sei $M \subseteq \text{Map}([0, T], X)$ eine Menge. Man sagt, dass M für *grundlegende Transformationen invariant* ist, wenn für alle $u \in M$, alle $s \in [0, T]$ und alle monoton steigenden, stetigen, stückweise linearen Funktionen $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ mit $\alpha(0) = 0$ gilt, dass

$$\mathcal{C}_s[u] \in M, \quad \mathcal{M}_s[u] \in M, \quad u \circ \alpha \in M. \quad (1.1.11)$$

- b) Es sei ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Man sagt, dass der *Definitionsbereich von \mathcal{H} für grundlegende Transformationen invariant* ist, wenn $D(\mathcal{H})$ für grundlegende Transformationen invariant ist.

1.1.16 Definition. Es sei ein linearer Vektorraum V gegeben. Für $v_1, v_2 \in V$ ist

$$\text{conv}(v_1, v_2) := \{(1 - s)v_1 + sv_2 \mid s \in [0, 1]\}. \quad (1.1.12)$$

Es sei an die folgende klassische Inklusion erinnert

1.1.17 Lemma. *Es sei ein linearer Vektorraum V gegeben. Für $v_1, v_2 \in V$ und $w_1, w_2 \in \text{conv}(v_1, v_2)$ gilt*

$$\text{conv}(w_1, w_2) \subseteq \text{conv}(v_1, v_2). \quad (1.1.13)$$

Beweis. Da $w_1, w_2 \in \text{conv}(v_1, v_2)$ sind, gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ mit

$$w_1 = (1 - \lambda_1)v_1 + \lambda_1 v_2, \quad w_2 = (1 - \lambda_2)v_1 + \lambda_2 v_2. \quad (1.1.14)$$

Für $w \in \text{conv}(w_1, w_2)$ gibt es ein $\gamma \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} w &= (1 - \gamma)v_1 + \gamma v_2 \\ &= (1 - \gamma)((1 - \lambda_1)v_1 + \lambda_1 v_2) + \gamma((1 - \lambda_2)v_1 + \lambda_2 v_2) \\ &= ((1 - \gamma)(1 - \lambda_1) + \gamma(1 - \lambda_2))v_1 + ((1 - \gamma)\lambda_1 + \gamma\lambda_2)v_2 \\ &= (1 - \lambda_1 - \gamma(\lambda_2 - \lambda_1))v_1 + (\lambda_1 + \gamma(\lambda_2 - \lambda_1))v_2. \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Da

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_1 + \gamma(\lambda_2 - \lambda_1) \leq 1 \quad (1.1.16)$$

ist somit bewiesen, dass $w \in \text{conv}(v_1, v_2)$ gilt. \square

1.2. Ratenunabhängigkeit, Kausalität und Hysterese-Operatoren

Ausgehend von [8, 37, 70] betrachten wir:

1.2.1 Definition. Es seien $T > 0$, nichtleere Mengen X und Y sowie ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.

a) \mathcal{H} wird als *kausal* oder auch als *Volterra-Operator* bezeichnet, wenn für alle $u_1, u_2 \in D(\mathcal{H})$ und alle $t \in [0, T]$ gilt:

$$\text{Wenn } (\forall s \in [0, t] : u_1(s) = u_2(s)) \quad \text{dann gilt} \quad \mathcal{H}[u_1](t) = \mathcal{H}[u_2](t). \quad (1.2.1)$$

b) \mathcal{H} heißt *ratenunabhängig*, wenn für alle $u \in D(\mathcal{H})$ und alle zulässigen Zeittransformationen α von $[0, T]$ nach Def. 1.2.2 mit $u \circ \alpha \in D(\mathcal{H})$ gilt:

$$\mathcal{H}[u \circ \alpha](t) = \mathcal{H}[u](\alpha(t)), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.2.2)$$

c) Man nennt \mathcal{H} einen *Hysterese-Operator*, wenn \mathcal{H} kausal und ratenunabhängig ist.

1.2.2 Definition. Die *zulässigen Zeittransformationen von $[0, T]$* sind die stetigen und monoton steigenden Funktionen $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$, so dass $\alpha(0) = 0$ und $\alpha(T) = T$ ist. (Dann ist $\alpha([0, T]) = [0, T]$.)

1.2.3 Bemerkung. Betrachtet man die Definition für Hysterese-Operatoren von Visintin in [70] genau, so wird dort bei der Formulierung der Ratenunabhängigkeit verlangt, dass die betrachteten Zeittransformationen auch noch injektiv sein müssen. Dies führt dazu, dass es Operatoren gibt, die im Sinne der Definition von Visintin Hysterese-Operatoren sind, aber nicht im obigen Sinn.

Dies gilt z.B. für $\mathcal{H}_1 : C([0, T]; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Map}([0, T], \mathbb{R})$ und $\mathcal{H}_2 : C([0, T]; \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T]; \mathbb{R})$ mit

$$\mathcal{H}_1[u](t) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(s) \neq u(t) \quad \forall 0 \leq s < t, \\ 0, & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

$$\mathcal{H}_2[u](t) := \begin{cases} u(t), & \text{wenn } u(s_1) \neq u(s_2) \quad \forall 0 \leq s_1 < s_2 \leq t, \\ u(\inf\{s_2 \in [0, t] \mid u(s_2) = u(s_1) \exists s_1 \in [0, s_2[)\}), & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

und für die Erweiterung des vektoriellen PLAY-Operators in [42] auf $BV([0, T]; X)$.

Allerdings sind praktisch alle anderen Operatoren, die in der Literatur mit der Formulierung von Visintin als Hysterese-Operatoren eingeführt werden, auch Hysterese-Operatoren im Sinne der obigen Definition, vgl. auch [41, 67, 72].

Dies ist wahrscheinlich eine Folge davon, dass beim Vorliegen von Stetigkeit des Operators bezüglich von Zeittransformationen die beiden Definitionen übereinstimmen.

1. Definition von Hysterese-Operatoren

Wenn man, wie in [8, S. 27], untersucht, ob für alle Input-Funktionen u für \mathcal{H} und alle $t_0 \in [0, T]$ gilt, dass durch $(u(t_0), \mathcal{H}[u](t_0))$ und das Verhalten von u auf $]t_0, T]$ das Verhalten von $\mathcal{H}[u]$ auf $[t_0, T]$ eindeutig definiert wird, dann inspiriert dies die folgende Definition, die man auch in [56, S. xvii] findet.

1.2.4 Definition. Es seien \mathcal{H} und T wie in Defn. 1.2.1 gegeben. Dann sagt man, dass \mathcal{H} ein *lokales Gedächtnis* hat, wenn für alle $u_1, u_2 \in D(\mathcal{H})$ und alle $t_0, t \in [0, T]$ mit $t_0 < t$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } \mathcal{H}[u_1](t_0) &= \mathcal{H}[u_2](t_0) \quad \text{und} \quad \forall s \in [t_0, t] : u_1(s) = u_2(s), \\ \text{dann gilt } \mathcal{H}[u_1](t) &= \mathcal{H}[u_2](t). \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Andernfalls sagt man, dass \mathcal{H} ein *nichtlokales Gedächtnis* hat.³

1.2.5 Lemma. Es seien \mathcal{H} und T wie in Defn. 1.2.1 gegeben, so dass \mathcal{H} ein Hysterese-Operator ist. Es seien $u \in D(\mathcal{H})$ und $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2$ gegeben.

$$\text{Wenn } \forall t \in [t_1, t_2] : u(t_1) = u(t), \quad \text{dann gilt } \forall t \in [t_1, t_2] : \mathcal{H}[u](t_1) = \mathcal{H}[u](t). \quad (1.2.6)$$

Beweis. Es seien $\alpha_1, \alpha_2 : [0, T] \rightarrow [0, T]$ definiert durch

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} t, & \text{wenn } t \leq t_1 \\ t_1 & \text{wenn } t_1 < t \leq \frac{t_1+t_2}{2}, \\ 2t - t_2, & \text{wenn } \frac{t_1+t_2}{2} < t \leq t_2, \\ t, & \text{wenn } t_2 < t, \end{cases} \quad (1.2.7)$$

$$\alpha_2(t) = \begin{cases} t, & \text{wenn } t \leq t_1 \\ 2t - t_1, & \text{wenn } t_1 < t \leq \frac{t_1+t_2}{2}, \\ t_2 & \text{wenn } \frac{t_1+t_2}{2} < t \leq t_2 \\ t, & \text{wenn } t_2 < t \end{cases} \quad (1.2.8)$$

für alle $t \in [0, T]$. Dann sind α_1 und α_2 stückweise lineare zulässige Zeittransformationen auf $[0, T]$, die sich nur auf $[t_1, t_2]$ unterscheiden, und die beide diesen Intervall auf sich selber abbilden. Da u auf diesem Intervall konstant ist, folgt, dass

$$u = u \circ \alpha_1 = u \circ \alpha_2.$$

Damit gilt für alle $t \in [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}]$, da \mathcal{H} ratenunabhängig ist:

$$\mathcal{H}[u](t_1) = \mathcal{H}[u](\alpha_1(t)) = \mathcal{H}[u \circ \alpha_1](t) = \mathcal{H}[u \circ \alpha_2](t) = \mathcal{H}[u](\alpha_2(t)). \quad (1.2.9)$$

Da $\alpha_2([t_1, \frac{t_1+t_2}{2}]) = [t_1, t_2]$ ist, folgt, dass (1.2.6) gilt. \square

³In [74] wird \mathcal{H} dann als „LONG-MEMORY OPERATOR“ bezeichnet.

1.3. Operatoren mit Anfangszustand und Operatoren mit der Halbgruppeneigenschaft

1.3.1. Operatoren mit Anfangszustand

In diesem Abschnitt seien $T > 0$ und nichtleere Mengen X, Y und Z gegeben. Weiterhin sei eine Abbildung $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.

1.3.1 Definition. Es sei für jedes $z \in Z$ die Menge

$$D(\mathcal{H}[z, \cdot]) := \{u \in \text{Map}([0, T], X) \mid (z, u) \in D(\mathcal{H})\} \quad (1.3.1)$$

nichtleer.

- a) Dann nennt man \mathcal{H} einen *Operator mit Anfangszustand in Z* .
- b) Wenn für alle $z_1, z_2 \in Z$ gilt, dass $D(\mathcal{H}[z_1, \cdot]) = D(\mathcal{H}[z_2, \cdot])$ ist, dann sagt man, dass der *Input-Funktionen-Anteil des Definitionsbereichs von \mathcal{H} unabhängig vom Anfangszustand ist*.
- c) Für $z \in Z$ ist der für z durch \mathcal{H} definierte Operator $\mathcal{H}[z, \cdot]$ definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[z, \cdot] : D(\mathcal{H}[z, \cdot]) &\rightarrow \text{Map}([0, T], Y), \\ u &\mapsto \mathcal{H}[z, u]. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

- d) Man sagt, dass \mathcal{H} ein *kausaler Operator* bzw. ein *ratenunabhängiger Operator* bzw. ein *Hysteres-Operator* ist, wenn für alle $z \in Z$ die entsprechende Aussage für den Operator $\mathcal{H}[z, \cdot]$ gilt.

Analog zu Def. 1.2.4 betrachten wir

1.3.2 Definition. Wenn \mathcal{H} ein Operator mit Anfangszustand in Z ist, dann sagt man, dass \mathcal{H} ein *Operator mit lokalem Gedächtnis* ist, wenn für alle $t_0, t \in [0, T]$, $z_1, z_2 \in Z$, $u_1 \in D(\mathcal{H}[z_1, \cdot])$ und $u_2 \in D(\mathcal{H}[z_2, \cdot])$ so dass $t_0 \leq t$,

$$\mathcal{H}[z_1, u_1](t_0) = \mathcal{H}[z_2, u_2](t_0), \quad u_1(s) = u_2(s), \quad \forall s \in [t_0, t], \quad (1.3.3)$$

folgt, dass

$$\mathcal{H}[z_1, u_1](t) = \mathcal{H}[z_2, u_2](t). \quad (1.3.4)$$

1.3.3 Definition. Es sei \mathcal{H} ein Operator mit Anfangszustand in Z .

Man sagt, dass der *Definitionsbereich von \mathcal{H} für grundlegende Transformationen invariant ist*, wenn für alle $z_0 \in Z$ gilt, dass der Definitionsbereich $D(\mathcal{H}[z_0, \cdot])$ von $\mathcal{H}[z_0, \cdot]$ für grundlegende Transformationen invariant ist.

1.3.2. Operatoren mit der Halbgruppeneigenschaft

In diesem Abschnitt seien $T > 0$ und nichtleere Mengen X, Y und Z mit $Z \subseteq Y$ gegeben. Weiterhin sei ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand in Z gegeben.

Analog zu [70, Kap. III.1, S.60, (1.4)] bzw. [8, Remark 2.4.3] bzw. [37, (1.27)] betrachten wir

1.3.4 Definition. Es sei \mathcal{H} ein Operator mit Anfangszustand in Z und es sei $Z \subseteq Y$. Dann sagt man, dass \mathcal{H} die *Halbgruppeneigenschaft* hat, wenn für alle $(z_0, u) \in D(\mathcal{H})$ und alle $s \in [0, T]$ gilt:

a)

$$(\mathcal{H}[z_0, u](s), \mathcal{M}_s[u]) \in D(\mathcal{H}), \quad (1.3.5)$$

b)

$$\mathcal{H}[z_0, u](t) = \mathcal{H}[\mathcal{H}[z_0, u](s), \mathcal{M}_s[u]](t - s), \quad \forall t \in [s, T]. \quad (1.3.6)$$

1.3.5 Bemerkung. a) Wenn \mathcal{H} die Halbgruppeneigenschaft hat, dann gilt für alle $(z_0, u) \in D(\mathcal{H})$ und $s \in [0, T]$, dass wegen (1.3.5) folgt, dass $\mathcal{H}[z_0, u](s) \in Z$ liegt. Also könnte man dann von vorne herein bei Halbgruppenbetrachtungen nur mit einem Operator arbeiten, bei dem Y gleich der Menge Z ist.

b) Für alle $(z_0, u) \in D(\mathcal{H})$ und alle $s \in [0, T]$ mit (1.3.5) ist (1.3.6) äquivalent zu

$$\mathcal{M}_s[\mathcal{H}[z_0, u]]|_{[0, T-s]} = \mathcal{H}[\mathcal{H}[z_0, u](s), \mathcal{M}_s[u]]|_{[0, T-s]}. \quad (1.3.7)$$

c) In [74] werden kausale Operatoren mit der Halbgruppeneigenschaft als „SHORT-MEMORY OPERATOREN“ bezeichnet.

1.3.6 Lemma. Wenn \mathcal{H} kausal ist und die Halbgruppeneigenschaft hat, dann hat \mathcal{H} auch ein lokales Gedächtnis.

Beweis. Es sei $\eta_1, \eta_2 \in Z$ beliebig. Seien $u_1 \in D(\mathcal{H}[\eta_1, \cdot])$ und $u_2 \in D(\mathcal{H}[\eta_2, \cdot])$ und $t_0, t \in [0, T]$ mit $t_0 < t$, so dass $\mathcal{H}[\eta_1, u_1](t_0) = \mathcal{H}[\eta_2, u_2](t_0)$ und

$$\forall s \in [t_0, t] : u_1(s) = u_2(s).$$

Somit stimmen $\mathcal{M}_{t_0}(u_1)$ und $\mathcal{M}_{t_0}(u_2)$ auf $[0, t - t_0]$ überein, und liegen, nach der Definition der Halbgruppeneigenschaft, in $D(\mathcal{H})$. Die Halbgruppeneigenschaft liefert:

$$\mathcal{H}[\eta_1, u_1](t) = \mathcal{M}_{t_0}[\mathcal{H}[\eta_1, u_1]](t - t_0) = \mathcal{H}[\mathcal{H}[\eta_1, u_1](t_0), \mathcal{M}_{t_0}[u_1]]. \quad (1.3.8)$$

Da die entsprechende Gleichung auch für η_2 und u_2 gilt, liefert die Kausalität von \mathcal{H} , dass $\mathcal{H}[\eta_1, u_1](t) = \mathcal{H}[\eta_2, u_2](t)$ ist.

Also hat $\mathcal{H}[\eta_0, \cdot](t)$ ein lokales Gedächtnis. \square

1.4. Untersuchung von Hysterese-Operatoren mit sinnvollen Definitionsbereichen

Es seien $T > 0$, nichtleere Mengen X und Y sowie ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y))$ dessen Definitionsbereich für grundlegende Transformationen invariant ist, gegeben,

1.4.1 Korollar. Für alle $u \in D(\mathcal{H})$ und alle $t \in [0, T]$ gilt

$$\mathcal{H}[u](t) = \mathcal{H}[\mathcal{C}_t[u]](T). \quad (1.4.1)$$

Beweis. Es sei $u \in D(\mathcal{H})$ gegeben. Da \mathcal{H} kausal ist und nach Voraussetzung $\mathcal{C}_t[u] \in D(\mathcal{H})$ liegt, folgt, dass $\mathcal{H}[u](t) = \mathcal{H}[\mathcal{C}_t[u]](t)$ ist. Mit (1.2.6) erhält man, dass (1.4.1) gilt. \square

1.4.2 Lemma. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{G} : D(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit $D(\mathcal{G}) = D(\mathcal{H})$ gegeben. Dann gilt:

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \iff \forall u \in D(\mathcal{H}) : \mathcal{H}[u](T) = \mathcal{G}[u](T). \quad (1.4.2)$$

Beweis. \implies klar

\impliedby Es gelte für alle $u \in D(\mathcal{H}) : \mathcal{H}[u](T) = \mathcal{G}[u](T)$.

Seien jetzt $u \in D(\mathcal{H})$ und $t \in [0, T]$ beliebig. Verwendung von (1.4.1) liefert

$$\mathcal{H}[u](t) = \mathcal{H}[\mathcal{C}_t[u]](T), \quad \mathcal{G}[u](t) = \mathcal{G}[\mathcal{C}_t[u]](T). \quad (1.4.3)$$

Dann liefert die Voraussetzung, dass $\mathcal{H}[u](T) = \mathcal{G}[u](T)$.

\square

1.5. Stetigkeit von Hysterese-Operatoren

In diesem Abschnitt seien $T > 0$ und zwei metrische Vektorräume $(X, d_X(\cdot, \cdot))$ und $(Y, d_Y(\cdot, \cdot))$ gegeben. Es sei ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq C([0, T]; X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.

1.5.1 Definition. Man sagt, dass $\mathcal{H} : C([0, T]; X)$ -konvergente Folgen auf punktweise konvergierende Folgen abbildet, wenn für alle Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ aus $D(\mathcal{H})$ und alle $u \in D(\mathcal{H})$ so dass $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ in $C([0, T]; X)$, d.h., so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} d_X(u_n(t), u(t)) = 0$, gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(\mathcal{H}[u_n](t), \mathcal{H}[u](t))_Y = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.5.1)$$

1.5.2 Definition. a) Für $t \in [0, T]$ wird durch

$$d_{X,t}(u, v) := \max_{0 \leq s \leq t} d_X(u(s), v(s)), \quad \forall u, v \in C([0, T]; X) \quad (1.5.2)$$

eine Halbmetrik auf $C([0, T]; X)$ definiert.

1. Definition von Hysterese-Operatoren

b) Es ist $d_{X,T}$ eine Metrik auf $C([0, T]; X)$.

1.5.3 Definition. Es sei ein kausaler Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq C([0, T]; X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.

a) Es sei eine monoton steigende Funktion $\psi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben. Dann nennt man \mathcal{H} *lokal Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten Abschätzung ψ* , wenn

$$d_Y(\mathcal{H}[u_1](t), \mathcal{H}[u_2](t)) \leq \psi(d_{X,t}(u_1, 0) + d_{X,t}(u_2, 0))d_{X,t}(u_1, u_2), \\ \forall u_1, u_2 \in D(\mathcal{H}), t \in [0, T]. \quad (1.5.3)$$

b) Man nennt \mathcal{H} *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es eine monoton steigende Funktion $\psi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gibt, so dass \mathcal{H} lokal Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten Abschätzung ψ ist.

1.5.4 Lemma. Es sei ein kausaler, lokal Lipschitz-stetiger Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq C([0, T]; X)$ gegeben.

Dann bildet \mathcal{H} $C([0, T]; X)$ -konvergente Folgen auf punktweise konvergierende Folgen ab.

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen. □

Mit (1.4.1) erhält man

1.5.5 Korollar. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq C([0, T]; X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben, dessen Definitionsbereich für grundlegende Transformationen invariant ist. Dann genügt es zur Überprüfung der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von \mathcal{H} die Ungleichung in (1.5.3) für $t = T$ zu betrachten.

2. Erzeugung von Hysterese-Operatoren aus anderen Hysterese-Operatoren

2.1. Hysterese-Operatoren und Verknüpfung mit Funktionen

2.1.1. Verknüpfung für Hysterese-Operatoren ohne Anfangszustand

In diesem Abschnitt seien $T > 0$, nichtleere Mengen X, Y und ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.

2.1.1 Definition. Es seien eine nichtleere Menge V , eine nichtleere Teilmenge Y_0 von Y und eine Abbildung $f : Y_0 \rightarrow V$ gegeben, so dass es wenigstens ein $u_0 \in D(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{H}[u](t) \in Y_0$ für alle $t \in [0, T]$ gibt.

Dann wird der Operator $f \circ \mathcal{H} : D(f \circ \mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], V)$ definiert durch

$$D(f \circ \mathcal{H}) := \{u \in D(\mathcal{H}) \mid u(t) \in Y_0 \quad \forall t \in [0, T]\}, \quad (2.1.1)$$

$$f \circ \mathcal{H}[u](t) := ((f \circ \mathcal{H})[u])(t) := f(\mathcal{H}[u](t)), \quad \forall t \in [0, T], u \in D(f \circ \mathcal{H}). \quad (2.1.2)$$

2.1.2 Lemma. Es seien V, Y_0 und f wie in Definition 2.1.1 gegeben, so dass $f \circ \mathcal{H}$ wohldefiniert ist.

- a) Wenn \mathcal{H} kausal bzw. ratenunabhängig bzw. ein Hysterese-Operator ist, dann gilt dies auch für $f \circ \mathcal{H}$.
- b) Hat \mathcal{H} ein lokales Gedächtnis und ist f injektiv, so hat auch $f \circ \mathcal{H}$ ein lokales Gedächtnis.
- c) Ist der Definitionsbereich von \mathcal{H} für grundlegende Transformationen invariant, so gilt dies auch für den Definitionsbereich von $f \circ \mathcal{H}$.

Beweis. Die Aussagen folgen durch Kombination der Definitionen. □

2.1.3 Definition. Seien eine nichtleere Menge W und eine Funktion $\psi : W \rightarrow X$ gegeben, so dass es mindestens eine Funktion $w_0 \in \text{Map}([0, T], W)$ gibt, so dass $\psi \circ w_0 \in D(\mathcal{H})$ liegt. Dann wird durch

$$w \mapsto \mathcal{H}[\psi \circ w] \quad (2.1.3)$$

2. Erzeugung von Hysterese-Operatoren aus anderen Hysterese-Operatoren

eine Abbildung von

$$\{w \in \text{Map}([0, T], W) \mid \psi \circ w \in D(\mathcal{H})\} =: D(\mathcal{H}[\psi \circ \cdot]) \quad (2.1.4)$$

nach $\text{Map}([0, T], Y)$ definiert, die im Folgenden als Operator $\mathcal{H}[\psi \circ \cdot] : D(\mathcal{H}[\psi \circ \cdot]) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ bezeichnet wird.

2.1.4 Lemma. *Seien W und ψ wie in Definition 2.1.3 gegeben, so dass $\mathcal{H}[\psi \circ \cdot]$ ein wohldefinierter Operator ist.*

- a) *Wenn \mathcal{H} kausal bzw. ratenunabhängig bzw. ein Hysterese-Operator ist, dann gilt dies auch für $\mathcal{H}[\psi \circ \cdot]$.*
- b) *Wenn \mathcal{H} lokales Gedächtnis hat, so hat auch $\mathcal{H}[\psi \circ \cdot]$ ein lokales Gedächtnis.*
- c) *Wenn der Definitionsbereich von \mathcal{H} für grundlegende Transformationen invariant ist, so gilt dies auch für den Definitionsbereich von $\mathcal{H}[\psi \circ \cdot]$.*
- d) *Es gilt*

$$\begin{aligned} & \{f \in D(\mathcal{H}) \mid f(t) \in \psi(W) \quad \forall t \in [0, T]\} \\ &= \psi \circ D(\mathcal{H}[\psi \circ \cdot]) := \{\psi \circ g \mid g \in D(\mathcal{H}[\psi \circ \cdot])\}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen. □

2.1.5 Definition. Sei eine nichtleere Teilmenge X_0 von X gegeben, in der es ein $u_0 \in D(\mathcal{H})$ gibt, so dass $u(t) \in X_0$ für alle $t \in [0, T]$.

Dann ist die *Einschränkung von \mathcal{H} auf Funktionen mit Werten in X_0* der Operator $\mathcal{H}|_{X_0} : D(\mathcal{H}|_{X_0}) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$, der definiert ist durch

$$D(\mathcal{H}|_{X_0}) := \{u \in D(\mathcal{H}) \mid u(t) \in X_0 \quad \forall t \in [0, T]\}, \quad (2.1.6)$$

$$\mathcal{H}|_{X_0}[u] := \mathcal{H}[u], \quad \forall u \in D(\mathcal{H}|_{X_0}). \quad (2.1.7)$$

2.1.6 Lemma. *Es sei X_0 wie in Def. 2.1.5 gegeben, so dass $\mathcal{H}|_{X_0}$ wohldefiniert ist.*

- a) *Wenn \mathcal{H} kausal bzw. ratenunabhängig bzw. ein Hysterese-Operator ist, dann gilt dies auch für $\mathcal{H}|_{X_0}$.*
- b) *Wenn \mathcal{H} ein lokales Gedächtnis hat, dann gilt dies auch für $\mathcal{H}|_{X_0}$.*
- c) *Ist der Definitionsbereich von \mathcal{H} für grundlegende Transformationen invariant, so gilt dies auch für den Definitionsbereich von $\mathcal{H}|_{X_0}$.*

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen. □

Aus dem Lemma 1.3.6 folgt, dass man aus einem Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft einen Hysterese-Operator mit lokalem Gedächtnis gewinnen kann, indem man die Zustandsvariable festhält. Eine komplizierte Methode zur Erzeugung eines Hysterese-Operator mit lokalem Gedächtnis aus einem Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft wird im Lemma 2.1.10 vorgestellt werden. Das folgende Lemma zeigt sogar, dass dies genau dann gilt:

2.1.7 Lemma. *Es sei \mathcal{H} ein Hysterese-Operator mit lokalem Gedächtnis, dessen Definitionsbereich für grundlegende Transformationen invariant ist.*

Definiert man jetzt für alle $s \in [0, T]$, $\alpha \in [0, 1]$ und $f \in \text{Map}([0, T], X)$ die Funktion $\hat{f}_{s,\alpha} \in \text{Map}([0, T], X)$ durch

$$\hat{f}_{s,\alpha}(t) := \mathcal{M}_s[f](\alpha t) = f(\min(T, s + \alpha t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.1.8)$$

und betrachtet man

$$Z := \{\mathcal{H}[u](t) \mid u \in D(\mathcal{H}), t \in [0, T]\} \quad (2.1.9)$$

und

$$D_0 := \{(\mathcal{H}[u](s), \hat{u}_{s,\alpha}) \mid u \in D(\mathcal{H}), s \in [0, T], \alpha \in [0, 1]\} \subset Z \times \text{Map}([0, T], X), \quad (2.1.10)$$

dann gilt:

a) *Es ist $\mathcal{G} : D_0 \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit*

$$\mathcal{G}[\mathcal{H}[u](s), \hat{u}_{s,\alpha}](t) := \mathcal{H}[u](\min(T, s + \alpha t)), \quad \forall u \in D(\mathcal{H}), s \in [0, T], \alpha \in [0, 1] \quad (2.1.11)$$

ein wohldefinierter Hysterese-Operator mit Anfangszustand in Z , der die Halbgruppeneigenschaft hat.

b) *Die Funktion $\phi : \{u(0) \mid u \in D(\mathcal{H})\} \rightarrow Z$, so dass $\phi(u(0)) = \mathcal{H}[u](0)$ für alle $u \in D(\mathcal{H})$ gilt, ist wohldefiniert, und es gilt für alle $u \in D(\mathcal{H})$, dass*

$$(\phi(u(0)), u) \in D(\mathcal{G}), \quad \mathcal{H}[u] = \mathcal{G}[\phi(u(0)), u]. \quad (2.1.12)$$

Beweis. Durch umfängliche, aber offensichtliche Rechnungen kann man die Gültigkeit der obigen Aussagen nachweisen. \square

2.1.2. Verknüpfung für Hysterese-Operatoren mit Anfangszustand

In diesem Abschnitt seien $T > 0$ und nichtleere Mengen X, Y und Z gegeben. Weiterhin sei ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand in Z gegeben.

2.1.8 Definition. Es seien eine nichtleere Teilmenge Y_0 von Y , eine nichtleere Menge W und eine Abbildung $f : Y_0 \rightarrow W$ gegeben, so dass

$$D(f \circ \mathcal{H}) := \{(z, u) \in Z \times D(\mathcal{H}) \mid \mathcal{H}[z, u](t) \in Y_0 \quad \forall t \in [0, T]\} \quad (2.1.13)$$

nicht leer ist. Dann wird $f \circ \mathcal{H} : D(f \circ \mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}([0, T], W)$ dadurch definiert, dass

$$f \circ \mathcal{H}[z, u](t) := f(\mathcal{H}[z, u](t)), \quad \forall t \in [0, T], (z, u) \in D(f \circ \mathcal{H}). \quad (2.1.14)$$

2. Erzeugung von Hysterese-Operatoren aus anderen Hysterese-Operatoren

2.1.9 Lemma. *Es seien Y_0, W und f gegeben, so dass $f \circ \mathcal{H}$ wie in Def. 2.1.8 wohldefiniert ist.*

- a) *Dann ist $f \circ \mathcal{H}$ genau dann ein Operator mit Anfangszustand, wenn es für jedes $z \in Z$ mindestens ein $u \in D(\mathcal{H})$ gibt, so dass (z, u) in $D(f \circ \mathcal{H})$ liegt. Wenn dies gilt, dann folgt für alle $z \in Z$, dass*

$$D(f \circ \mathcal{H}[z, \cdot]) = \{u \in D(\mathcal{H}[z, \cdot]) \mid \mathcal{H}[z, u](t) \in Y_0 \quad \forall t \in [0, T]\} \quad (2.1.15)$$

und dass der Operator $f \circ \mathcal{H}[z, \cdot] : D(f \circ \mathcal{H}[z, \cdot]) \rightarrow \text{Map}([0, T], W)$ dadurch definiert ist, dass (2.1.14) für alle $u \in D(f \circ \mathcal{H}[z, \cdot])$ gilt.

- b) *Wenn $f \circ \mathcal{H}$ ein Operator mit Anfangszustand ist, \mathcal{H} die Halbgruppeneigenschaft hat und f injektiv ist, dann hat $f \circ \mathcal{H}$ die Halbgruppeneigenschaft.*

Beweis. Die Aussage folgen durch Verknüpfen der Definitionen. □

2.1.10 Lemma. *Es sei eine nichtleere Teilmenge D_1 von $\text{Map}([0, T], X)$ und eine Funktion $\phi : \{u(0) \mid u \in D_1\} \rightarrow Z$ gegeben, so dass $(\phi(u(0)), u) \in D(\mathcal{H})$ für alle $u \in D_1$ gilt.*

- a) *Dann wird durch*

$$\mathcal{G} : D_1 \rightarrow \text{Map}([0, T], Y), \quad \mathcal{G}[u] := \mathcal{H}[\phi(u(0)), u], \quad \forall u \in D_1 \quad (2.1.16)$$

ein Operator mit $D(\mathcal{G}) = D_1$ definiert.

- b) *Wenn \mathcal{H} kausal bzw. ratenunabhängig bzw. ein Hysterese-Operator ist, dann gilt dies auch für \mathcal{G} .*
- c) *Wenn \mathcal{H} ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft ist, dann hat \mathcal{H} ein lokales Gedächtnis.*

Beweis. Die Aussage folgen durch Verknüpfen der Definitionen. □

2.2. Verknüpfung von Hysterese-Operatoren

2.2.1 Definition. Es sei $T > 0$. Es seien X, Y und Z nichtleere Mengen. Es seien zwei Operatoren $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ und $\mathcal{G} : D(\mathcal{G}) (\subseteq \text{Map}([0, T], Y)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Z)$ gegeben, so dass es mindestens ein $u \in D(\mathcal{H})$ gibt, so dass $\mathcal{H}[u] \in D(\mathcal{G})$.

Dann ist

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H} : D(\mathcal{G} \circ \mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Z)$$

definiert durch

$$D(\mathcal{G} \circ \mathcal{H}) := \{u \in D(\mathcal{H}) \mid \mathcal{H}[u] \in D(\mathcal{G})\}, \quad (2.2.1)$$

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}[u] := \mathcal{G}[\mathcal{H}[u]]. \quad (2.2.2)$$

2.2.2 Lemma. *Es seien T, X, Y, Z, \mathcal{H} und \mathcal{G} wie in Def. 2.2.1, so dass $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ wohldefiniert ist. Wenn \mathcal{G} und \mathcal{H} Hysterese-Operatoren sind, dann ist auch $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ ein Hysterese-Operator.*

Beweis. Die Voraussetzung an die Definitionsbereiche liefert, dass $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$ wohldefiniert ist. Die Kausalität und die Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H} und \mathcal{G} liefern unmittelbar die entsprechenden Eigenschaften für $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}$. \square

2.3. Fortsetzung lokal Lipschitz-stetiger Operatoren

In diesem Abschnitt seien $T > 0$ und zwei metrische Räume $(X, d_X(\cdot, \cdot))$ und $(Y, d_Y(\cdot, \cdot))$ gegeben, wobei Y vollständig ist.

2.3.1 Satz. *Es sei ein lokal Lipschitz-stetiger Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq C([0, T]; X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $\overline{D(\mathcal{H})}$ der Abschluss von $D(\mathcal{H})$ bezüglich $d_{X,T}(\cdot, \cdot)$.*

- a) *Es gibt genau eine Fortsetzung $\overline{\mathcal{H}} : \overline{D(\mathcal{H})} \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ von \mathcal{H} auf $\overline{D(\mathcal{H})}$ die $C([0, T]; X)$ -konvergente Folgen auf punktweise konvergierende Folgen abbildet.*
- b) *$\overline{\mathcal{H}}$ ist lokal Lipschitz-stetig und kausal.*
- c) *Es sei eine monoton steigende Funktion $\psi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben, so dass \mathcal{H} lokal Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten Abschätzung ψ ist. Dann ist $\overline{\mathcal{H}}$ lokal Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten Abschätzung $\overline{\psi}$, wobei die Funktion $\overline{\psi} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ definiert ist durch $\overline{\psi}(r) := \lim_{s \searrow r} \psi(s)$ für alle $r \geq 0$.*
- d) *Wenn \mathcal{H} ratenunabhängig ist, dann auch $\overline{\mathcal{H}}$.*
- e) *Wenn \mathcal{H} ein Hysterese-Operator ist, dann auch $\overline{\mathcal{H}}$.*

Beweis. Es sei eine monoton steigende Funktion $\psi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben, so dass die Ungleichung (1.5.3) gilt.

- a) Es sei $u \in \overline{D(\mathcal{H})}$ beliebig. Wenn man jetzt eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ in $D(\mathcal{H})$ betrachtet, so dass $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$ in $C([0, T]; X)$, dann ist für alle $t \in [0, T]$ die Folge $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ eine Cauchy-Folge in X , und nach (1.5.3) ist dann auch $(\mathcal{H}[u_n](t))_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ eine Cauchy-Folge in Y . Da Y vollständig ist, gibt es somit einen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}[u_n](t)$. Betrachtet man eine andere Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ in $D(\mathcal{H})$, so dass $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$ in $C([0, T]; X)$, dann liefert (1.5.3), dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}[v_n](t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}[u_n](t)$.

Also ist $\overline{\mathcal{H}}[u] : [0, T] \rightarrow Y$ mit $\overline{\mathcal{H}}[u](t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}[u_n](t)$ eine wohldefinierte Funktion.

So wird ein Operator $\overline{\mathcal{H}} : \overline{D(\mathcal{H})} \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ definiert, der eine Fortsetzung von \mathcal{H} auf $\overline{D(\mathcal{H})}$ ist. Dank der Aussage b) folgt, dass $\overline{\mathcal{H}} : C([0, T]; X) \rightarrow Y$ folgenstetig ist. Da $\overline{\mathcal{H}}$ offensichtlich die einzig mögliche $C([0, T]; X)$ -folgenstetige Fortsetzung von \mathcal{H} auf $\overline{D(\mathcal{H})}$ ist, ist die Aussage a) bewiesen.

- b) Folgt aus der Aussage c).

2. Erzeugung von Hysterese-Operatoren aus anderen Hysterese-Operatoren

- c) Es seien $u, v \in \overline{D(\mathcal{H})}$ und $t \in [0, T]$ beliebig. Es seien Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ in $D(\mathcal{H})$, gegeben, so dass $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$ und $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v$ in $C([0, T]; X)$. Dann ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \psi(d_{X,t}(u_n, 0) + d_{X,t}(v_n, 0)) \leq \bar{\psi}(d_{X,t}(u, 0) + d_{X,t}(v, 0)). \quad (2.3.1)$$

Kombiniert man dies mit (1.5.3), dann folgt:

$$\begin{aligned} d_Y(\bar{\mathcal{H}}[u](t), \bar{\mathcal{H}}[v](t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(\mathcal{H}[u_n](t), \mathcal{H}[v_n](t)) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\psi(d_{X,t}(u_n, 0) + d_{X,t}(v_n, 0))) \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(u_n(t), v_n(t)) \\ &\leq \bar{\psi}(d_{X,t}(u, 0) + d_{X,t}(v, 0)) d_X(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\bar{\mathcal{H}}$ lokal Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten Abschätzung $\bar{\psi}$ ist.

- d) Es sei \mathcal{H} ratenunabhängig. Es sei $u \in \overline{D(\mathcal{H})}$ und eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$, so dass $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$ in $C([0, T]; X)$, gegeben. Ist $\alpha: [0, T] \rightarrow [0, T]$ eine zulässige Zeittransformation von $[0, T]$, dann folgt, dass $u_n \circ \alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \circ \alpha$ in $C([0, T]; X)$.

Aus der Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H} und der $C([0, T]; X)$ -Folgenstetigkeit von $\bar{\mathcal{H}}$ folgt dann für alle $t \in [0, T]$, dass

$$\bar{\mathcal{H}}[u \circ \alpha](t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}[u_n \circ \alpha](t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}[u_n](\alpha(t)) = \bar{\mathcal{H}}[u](\alpha(t)). \quad (2.3.2)$$

Also ist $\bar{\mathcal{H}}$ ratenunabhängig.

- e) Aussage folgt aus d) und b).

□

Teil II.

Hysteresese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen und das zugehörige Darstellungsergebnis

3. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ gegeben.

Bei der Bezeichnung der Operatoren wird in dieser Arbeit der Hauptteil der Bezeichnung mit *Kapitälchen* (Small caps) gesetzt, um klar zu stellen, dass es sich um Bezeichnungen von Operatoren handelt. Da diese neben Eigennamen meist die englischen Bezeichnungen dieser Operatoren sind, wie z.B. beim RELAY-, beim PLAY- und beim STOP-Operator, sei darauf hingewiesen, dass das „Stop“ beim letzten Operator ein korrektes englisches Wort und kein falsch geschriebenes deutsches „Stopp“ ist.

3.1. Der RELAY-Operator

Zur Modellierung von Schaltvorgängen, wie z.B. Thermostaten, die eine Heizung einschalten, wenn die Temperatur unter einen Schwellenwert fällt, und diese erst wieder ausschalten, wenn die Temperatur über einen höheren Schwellenwert steigt, werden die nicht-idealen RELAY-Operatoren verwendet.

Hier werden jetzt einige verschiedene Operatoren dieses Typs, die in der Literatur verwendet werden, vorgestellt.

3.1.1. Der „normale“ RELAY-Operator

Der skalare RELAY-Operator, wie er in z.B. [8, 36, 37, 70] betrachtet wird, wird definiert durch

3.1.1 Definition. a) Für $a < b$ und $\eta_0 \in \{-1, 1\}$ wird der RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b}[\eta_0, \cdot] : C[0, T] \rightarrow \text{Map}([0, T], \{-1, 1\})$ definiert durch

$$\mathcal{R}_{a,b}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t) \geq b, \\ -1, & \text{wenn } u(t) \leq a, \\ \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in]a, b[, \quad \forall s \in [0, t], \\ \mathcal{R}_{a,b}[\eta_0, u](\max\{s \in [0, t] : u(s) \notin]a, b[\}), & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

für alle $u \in C[0, T]$.

b) Für $a < b$ wird der RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b} : \{-1, 1\} \times C[0, T] \rightarrow \text{Map}([0, T], \{-1, 1\})$ definiert als die Abbildung von $(\eta_0, u) \in \{-1, 1\} \times C[0, T]$ auf $\mathcal{R}_{a,b}[\eta_0, u]$ aus a).

3. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

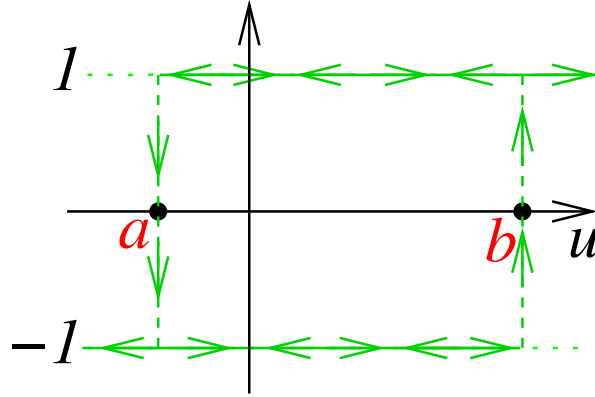


Abbildung 3.1.: Das Input-Output Verhalten des RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}$

3.1.2 *Bemerkung.* Sei $a < b$ beliebig.

- Der RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b}$ ist ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft.
- Es gibt auch Definitionen des RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}[\eta_0, \cdot]$, bei denen η_0 in Definition 3.1.1.a) eine beliebige Zahl in $[-1, 1]$ sein kann. Dann muss man den Operator als Abbildung nach $\text{Map}([0, T], \{-1, 1, \eta_0\})$ bzw. nach $\text{Map}([0, T], [-1, 1])$ definieren. Und der RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b}$ wäre dann eine Abbildung von $[-1, 1] \times C[0, T]$ nach $\text{Map}([0, T], [-1, 1])$.
- Für $\eta_0 \in \{-1, 1\}$ und $u \in C[0, T]$ kann man (3.1.1) umschreiben in

$$\mathcal{R}_{a,b}[\eta_0, u](t) = \begin{cases} r_{a,b}(u(t)), & \text{wenn } u(t) \notin]a, b[, \\ \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in]a, b[, \quad \forall s \in [0, t], \\ r_{a,b}(u(\max\{s \in [0, t] : u(s) \notin]a, b[\})), & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

und in

$$\mathcal{R}_{a,b}[\eta_0, u](t) = \begin{cases} \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in]a, b[, \quad \forall s \in [0, t], \\ r_{a,b}(u(\max\{s \in [0, t] : u(s) \notin]a, b[\})), & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

mit $r_{a,b} :]-\infty, a] \cup [b, \infty[\rightarrow \{-1, 1\}$ definiert durch

$$r_{a,b}(w) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } w \geq b, \\ -1, & \text{wenn } w \leq a. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

- Betrachtet man $u_n(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{n-1}{n} \sin(20\pi t/T)$ und $u(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin(20\pi t/T)$, dann sieht man, dass u_n in $C[0, T]$ gleichmäßig gegen u konvergiert, $\mathcal{R}_{a,b}[1, u_n]$ konstant gleich 1 ist, während $\mathcal{R}_{a,b}[1, u]$ jeweils zu den Zeitpunkten $1T/20, 3T/20, \dots, 19T/20$ von 1 auf den Wert -1 wechselt und dann konstant bleibt, bis er zu den Zeitpunkten $2T/20, 4T/20, \dots, 20T/20$ dann wieder von -1 auf 1 wechselt und dann bis zum nächsten Wechsel auf -1 konstant bleibt. Dies zeigt, dass $\mathcal{R}_{a,b}[1, u_n]$ noch nicht einmal punktweise gegen $\mathcal{R}_{a,b}[1, u]$ konvergiert.

- e) Wie d) zeigt, ist der RELAY-Operator als Abbildung von $C[0, T]$ betrachtet mit gleichmäßiger Konvergenz keine stetige Abbildung auf $\text{Map}[0, T]$ betrachtet mit punktweiser Konvergenz.

3.1.2. Skalarer außerschaltender RELAY-Operator

Betrachtet man den „rectangular loop operator“ $\hat{\beta}_{\alpha\beta}$ für $\alpha \geq \beta$ wie er in [56, S.2] definiert wird, und die Diskussion auf [56, S.9f], so erkennt man, dass dieser Operator eine Modifikation des obigen RELAY-Operators ist. Bei dieser Modifikation wird erst bei Überschreiten der oberen/ Unterschreiten der unteren Schaltgrenze umgeschaltet. Dieser Operator wird in der Literatur auch als RELAY-Operator betrachtet, und wird hier im Folgenden zur Unterscheidung als *außerschaltender RELAY-Operator* bezeichnet, um ihn von dem RELAY-Operator aus dem Abschnitt 3.1.1. unterscheiden zu können.

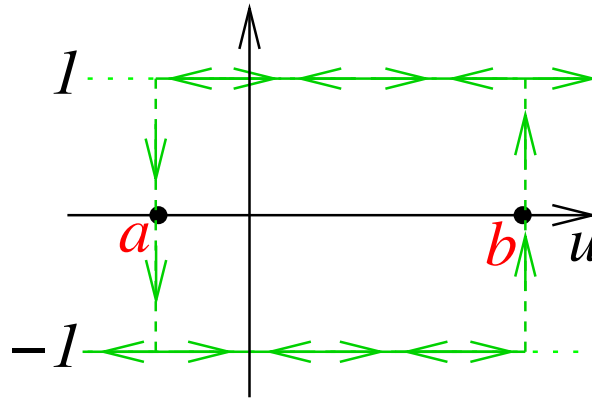


Abbildung 3.2.: Das Input-Output Verhalten des außerschaltenden RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}$

3.1.3 Definition. a) Für $a < b$ und $\eta_0 \in \{-1, 1\}$ wird der *außerschaltende RELAY-Operator* $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[\eta_0, \cdot] : C[0, T] \rightarrow \text{Map}([0, T], \{-1, 1\})$ definiert durch

$$\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in [a, b], \quad \forall s \in [0, t], \\ 1, & \text{wenn } u(t) > b, \\ -1, & \text{wenn } u(t) < a, \\ \begin{cases} 1, & \text{wenn } b = u(\sup\{s \in [0, t] : u(s) \notin [a, b]\}) \\ -1, & \text{andernfalls,} \end{cases} & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

für alle $u \in C[0, T]$.

- b) Für $a < b$ wird der *außerschaltende RELAY-Operator* $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}} : \{-1, 1\} \times C[0, T] \rightarrow \text{Map}([0, T], \{-1, 1\})$ definiert durch die Abbildung von $(\eta_0, u) \in \{-1, 1\} \times C[0, T]$ auf $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[\eta_0, u]$ aus a).

3. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

- c) Für $a \in \mathbb{R}$ und $\eta_0 \in [-1, 1]$ wird der *außenschaltende RELAY-Operator* $\mathcal{R}_{a,a}^{\text{out}}[\eta_0, \cdot] : C[0, T] \rightarrow \text{Map}([0, T], \{-1, 1\})$ definiert durch

$$\mathcal{R}_{a,a}^{\text{out}}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t) > a, \\ -1, & \text{wenn } u(t) < a, \\ \eta_0, & \text{wenn } M_{>a} = \emptyset, \quad M_{<a} = \emptyset, \\ 1, & \text{wenn } M_{>a} \neq \emptyset, \quad M_{<a} = \emptyset, \\ -1, & \text{wenn } M_{>a} = \emptyset, \quad M_{<a} \neq \emptyset, \\ \begin{cases} 1, & \text{wenn } \sup M_{>a} \geq \sup M_{<a}, \\ -1, & \text{andernfalls,} \end{cases} & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.1.6)$$

mit

$$M_{>a}(u, t) := \{s \in [0, t] \mid u(s) > a\}, \quad M_{<a}(u, t) := \{s \in [0, t] \mid u(s) < a\}, \quad (3.1.7)$$

für alle $u \in C[0, T]$.

- d) Für $a \in \mathbb{R}$ wird der *außenschaltende RELAY-Operator* $\mathcal{R}_{a,a}^{\text{out}} : \{-1, 1\} \times C[0, T] \rightarrow \text{Map}([0, T], \{-1, 1\})$ definiert durch die Abbildung von $(\eta_0, u) \in \{-1, 1\} \times C[0, T]$ auf $\mathcal{R}_{a,a}^{\text{out}}[\eta_0, u]$ aus c).

3.1.4 *Bemerkung.* a) Sei $a \leq b$ beliebig. Der außenschaltende RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b}$ ist ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft.

- b) Sei $a \leq b$ beliebig. Analog zu Bem.3.1.4f) könnte man auch bei der Definition des außenschaltenden RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[\eta_0, \cdot]$ mit η_0 in $[-1, 1]$ beliebig arbeiten.
- c) Sei $a < b$ beliebig. Für $\eta_0 \in \{-1, 1\}$ und $u \in C[0, T]$ kann man (3.1.5) umschreiben in

$$\mathcal{R}_{a,b}[\eta_0, u](t) = \begin{cases} \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in [a, b] \quad \forall s \in [0, t], \\ r_{a,b}(u(\sup\{s \in [0, t] : u(s) \notin [a, b]\})), & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

mit $r_{a,b}$ wie in (3.1.4).

- d) Die Definition von $\mathcal{R}_{a,a}^{\text{out}}[\eta_0, u](t)$ in (3.1.6) sorgt in dem Fall, dass der Input um a schwankt, dafür, dass der RELAY-Operator im Zweifelsfall eine 1 zurückliefert. Wenn eine Zeit t_0 sowohl Häufungspunkt von Zeitpunkten in $[0, t_0[$ ist, zu denen u größer als a ist, als auch Häufungspunkt von Zeitpunkten in $[0, t_0[$ zu denen u kleiner als a ist, dann wird der Output des außenschaltenden RELAY-Operators als 1 definiert. Würde man in (3.1.6) „ $\sup M_{>a} \geq \sup M_{<a}$ “ durch „ $\sup M_{>a} > \sup M_{<a}$ “ ersetzen, so würde der entsprechende außenschaltende RELAY-Operator in der entsprechenden Situation eine -1 als Output liefern.
- e) Betrachtet man die Definition von $\mathcal{R}_{a,a}^{\text{out}}[\eta_0, u](t)$ in (3.1.6), dann erkennt man, dass eine Darstellung dieses Operators mit einer Formel analog zu (3.1.8) nicht möglich ist.

- f) Betrachtet man $v_n(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{n+1}{n} \sin(20\pi t/T)$ und $u(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin(20\pi t/T)$, dann sieht man, dass v_n in $C[0, T]$ gleichmäßig gegen u konvergiert, $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[1, u]$ konstant gleich 1 ist, während $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[1, v_n]$ jeweils nach den Zeitpunkten $1T/20, 3T/20, \dots, 19T/20$ von 1 auf den Wert -1 wechselt und dann konstant bleibt, bis er nach den Zeitpunkten $2T/20, 4T/20, \dots, 20T/20$ dann wieder von -1 auf 1 wechselt und dann bis zum nächsten Wechsel auf -1 konstant bleibt. Dies zeigt, dass $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[1, v_n]$ noch nicht einmal punktweise gegen $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[1, u]$ konvergiert.

Vergleicht man das Input-Output Verhalten des RELAY-Operators und des außenschaltenden RELAY-Operators in Fig. 3.3, so sieht man, dass der außenschaltende RELAY-Operator weniger oft schaltet.

- g) Wie f) zeigt, ist der RELAY-Operator als Abbildung von $C[0, T]$ mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\text{Map}[0, T]$ mit punktweiser Konvergenz nicht stetig.

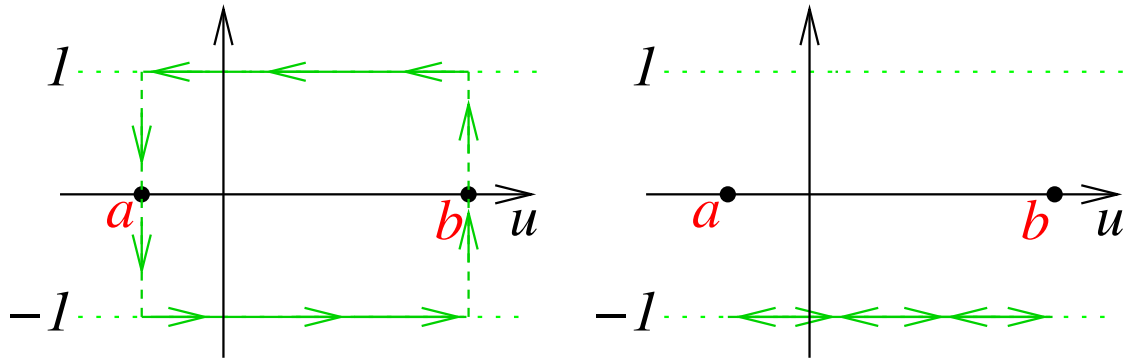


Abbildung 3.3.: Vergleich des Input-Output Verhalten des RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}[-1, u]$ (links) und des außenschaltenden RELAY-Operators $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[-1, u]$ (rechts) für $u(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos(20\pi t/T)$

3.2. Skalarer STOP-Operator, skalarer PLAY-Operator und Variationen

3.2.1. Skalarer STOP-Operator

Das Folgende ist zum Teil eine überarbeitete Übersetzung der Ausführungen des Autors in [25].

Ein wichtiges Beispiel für einen Hysterese-Operator ist der STOP-Operator, welcher auch als *Prandtl's normalisiertes elastisch-perfekt plastische Element* bezeichnet wird. Ausgehend von [8, 36, 37, 70] wird die folgende Definition formuliert:

3.2.1 Definition. Sei ein Wert $r > 0$ gegeben.

3. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

- a) Für einen Anfangswert $\sigma_0 \in [-r, r]$ für die Verzerrung wird der STOP-Operator $\mathcal{S}_r[\sigma_0, \cdot] : W^{1,1}(0, T) \rightarrow W^{1,1}(0, T)$ dadurch definiert, dass jede Input-Funktion $\varepsilon \in W^{1,1}(0, T)$ auf die eindeutige Lösung $\sigma \in W^{1,1}(0, T)$ der Variationsungleichung

$$\sigma(t) \in [-r, r], \quad \forall t \in [0, T], \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad (3.2.1)$$

$$(\varepsilon_t(t) - \sigma_t(t))(\sigma(t) - \eta) \geq 0, \quad \forall \eta \in [-r, r], \quad \text{fast überall in } (0, T), \quad (3.2.2)$$

abgebildet wird.

- b) Für einen Anfangswert $\sigma_0 \in \mathbb{R} \setminus [-r, r]$ wird der STOP-Operator $\mathcal{S}_r[\sigma_0, \cdot] : W^{1,1}(0, T) \rightarrow W^{1,1}(0, T)$ definiert durch

$$\mathcal{S}_r[\sigma_0, \cdot] := \mathcal{S}_r[\sigma'_0, \cdot] \quad \text{mit} \quad \sigma'_0 := \text{Proj}_{[-r, r]}(\sigma_0) = \begin{cases} r, & \sigma_0 > r, \\ -r, & \sigma_0 < -r. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

- c) Der STOP-Operator $\mathcal{S}_r : \mathbb{R} \times W^{1,1}(0, T) \rightarrow W^{1,1}(0, T)$ ist dadurch definiert, dass $(\sigma_0, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times W^{1,1}(0, T)$ auf $\mathcal{S}_r[\sigma_0, \varepsilon]$ wie in a) oder b) abgebildet wird.

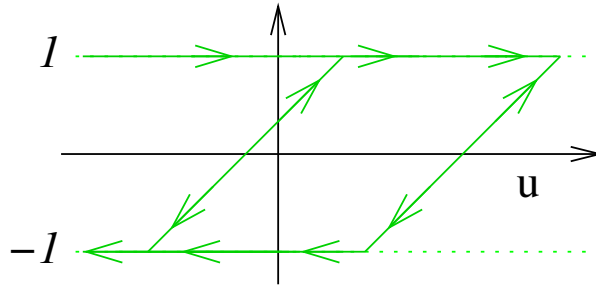


Abbildung 3.4.: Das Input-Output Verhalten des STOP-Operators \mathcal{S}_r

Als konsistente Fortsetzung ergibt sich

3.2.2 Definition. Der STOP-Operator $\mathcal{S}_0 : \mathbb{R} \times W^{1,1}(0, T) \rightarrow W^{1,1}(0, T)$ ist dadurch definiert, dass $(\sigma_0, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times W^{1,1}(0, T)$ auf $\mathcal{S}_0[\sigma_0, \varepsilon] \equiv 0$ abgebildet wird.

Eine Diskussion über Varianten des STOP-Operators in der Literatur findet sich im Abschnitt 3.2.3.

Weiterhin gilt, siehe [8, 36, 37, 70]:

3.2.3 Bemerkung. a) Es gilt für alle $r \geq 0$ und alle $(\sigma_0, \varepsilon) \in [-r, r] \times W^{1,1}(0, T)$, dass $\mathcal{S}_r[\sigma_0, \varepsilon](0) = \sigma_0$ ist.

b) Für alle $r \geq 0$ hat der STOP-Operator \mathcal{S}_r die Halbgruppeneigenschaft.

c) Für $r > 0$ und $(\sigma_0, u) \in [-r, r] \times W^{1,1}(0, T)$, so dass u auf $[0, t]$ monoton ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_r[\sigma_0, u](t) &= \begin{cases} r, & \text{wenn } \sigma_0 + u(t) - u(0) > r, \\ \sigma_0 + u(t) - u(0), & \text{wenn } \sigma_0 + u(t) - u(0) \in [-r, r], \\ -r, & \text{wenn } \sigma_0 + u(t) - u(0) < -r, \end{cases} \\ &= \max\{-r, \min\{r, \sigma_0 + u(t) - u(0)\}\}. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

- d) Für alle $r \geq 0$ kann man den STOP-Operator \mathcal{S}_r zu einer Lipschitz-stetigen Funktion von $\mathbb{R} \times C[0, T]$ nach $C[0, T]$ fortsetzen.

3.2.2. Skalarer PLAY-Operator

Analog zu [8, 36, 37, 70] wird die folgende Definition formuliert:

3.2.4 Definition. Für eine Fließgrenze $r \geq 0$ ist der PLAY-Operator \mathcal{P}_r definiert durch

$$\mathcal{P}_r : \mathbb{R} \times W^{1,1}(0, T) \rightarrow W^{1,1}(0, T), \quad (3.2.5)$$

$$\mathcal{P}_r[\sigma_0, u] = u - \mathcal{S}_r[u(0) - \sigma_0, u], \quad \forall \sigma_0 \in \mathbb{R}, u \in W^{1,1}(0, T). \quad (3.2.6)$$

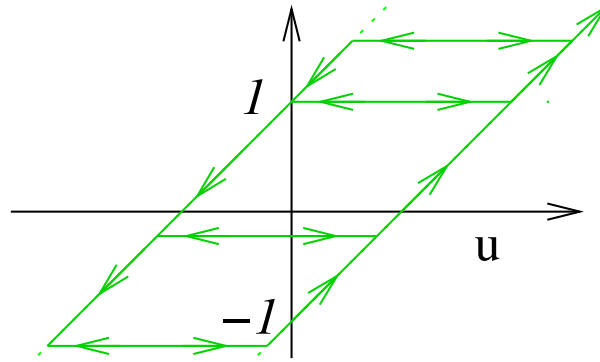


Abbildung 3.5.: Das Input-Output Verhalten des PLAY-Operators \mathcal{P}_r

In [8, 36, 37, 70] finden sich die folgenden Resultate:

3.2.5 Bemerkung. a) Für alle $r \geq 0$ hat der PLAY-Operator \mathcal{P}_r die Halbgruppeneigenschaft.

b) Für $(\sigma_0, u) \in \mathbb{R} \times W^{1,1}(0, T)$ ist $\mathcal{P}_0[\sigma_0, u] = u$.

c) Für $(\sigma_0, u) \in \mathbb{R} \times W^{1,1}(0, T)$ ist

$$u = \mathcal{P}_r[\sigma_0, u] + \mathcal{S}_r[u(0) - \sigma_0, u] = \mathcal{P}_r[u(0) - \sigma_0, u] + \mathcal{S}_r[\sigma_0, u], \quad (3.2.7)$$

$$\mathcal{S}_r[u(0) - \sigma_0, u] = u - \mathcal{P}_r[\sigma_0, u], \quad \mathcal{P}_r[u(0) - \sigma_0, u] = u - \mathcal{S}_r[\sigma_0, u], \quad (3.2.8)$$

$$\mathcal{S}_r[\sigma_0, u] = u - \mathcal{P}_r[u(0) - \sigma_0, u], \quad \mathcal{P}_r[\sigma_0, u] = u - \mathcal{S}_r[u(0) - \sigma_0, u]. \quad (3.2.9)$$

- d) Für $r > 0$ und $(\sigma_0, u) \in \mathbb{R} \times W^{1,1}(0, T)$, so dass $|u(0) - \sigma_0| \leq r$ ist und u auf $[0, t]$ monoton ist, gilt

$$\mathcal{P}_r[\sigma_0, u](t) = \begin{cases} \sigma_0, & \text{wenn } |u(t) - \sigma_0| \leq r, \\ u(t) - r, & \text{wenn } u(t) > \sigma_0 + r, \\ u(t) + r, & \text{wenn } u(t) < \sigma_0 - r. \end{cases}$$

3. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

Dies liefert

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_r[\sigma_0, u](t) &= \begin{cases} \max\{\sigma_0, u(t) - r\}, & \text{wenn } u(t) > u(0), \\ \min\{\sigma_0, u(t) + r\}, & \text{wenn } u(t) < u(0), \\ \sigma_0 & \text{andernfalls,} \end{cases} \\ &= \min\{u(t) + r, \max\{u(t) - r, \sigma_0\}\} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

und

$$\mathcal{P}_r[\sigma_0, u](t) = \begin{cases} \sigma_0, & \text{wenn } |u(t) - \sigma_0| \leq r, \\ u(t) - \text{sign}_{\pm 1}(u(t) - \sigma_0)r, & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

mit $\text{sign}_{\pm 1} : \mathbb{R} \rightarrow \{1, -1\}$ definiert durch

$$\text{sign}_{\pm 1}(s) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } s \geq 0, \\ -1, & \text{wenn } s < 0. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

e) Für alle $r \geq 0$ kann man den PLAY-Operator \mathcal{P}_r zu einer Lipschitz-stetigen Funktion von $\mathbb{R} \times C[0, T]$ nach $C[0, T]$ fortsetzen.

3.2.6 Bemerkung. Die in z.B. [32] verwendete Definition für den PLAY-Operator kann man auch durch Kombination der beiden obigen erhalten:

Für $r > 0$ und $(\sigma_0, u) \in \mathbb{R} \times W^{1,1}(0, T)$ gilt $\mathcal{P}_r[\sigma_0, u] = \xi$, wobei ξ die eindeutige Lösung der folgenden Variationsungleichung ist:

$$|u(t) - \xi(t)| \leq r \quad \forall t \geq 0 \quad (3.2.13a)$$

$$\xi_t(t) (u(t) - \xi(t) - y) \geq 0 \quad \forall |y| \leq r \quad \text{fast überall auf } (0, T), \quad (3.2.13b)$$

$$\xi(0) = \min\{u(0) + r, \max\{u(0) - r, \sigma_0\}\}. \quad (3.2.13c)$$

Man erhält aus [8, (2.4.6), (2.1.28)] oder, (siehe Bemerkung 3.2.8.c), aus [37, Lemma II.3.6]

3.2.7 Lemma. Es seien $u \in C[0, T]$, $\sigma_0, v \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ und $w_0 \in \{-1, 1\}$ gegeben, so dass $|u - \sigma_0| \leq r$ ist.

a) Wenn $w_0 = -1$ ist und $v \geq \sigma_0$, dann gilt für alle $t \in [0, T]$, so dass $v \neq \mathcal{P}_r[\sigma_0, u](t)$ ist:

$$\mathcal{R}_{v-r, v+r}[w_0, u] = \begin{cases} +1, & \text{wenn } v < \mathcal{P}_r[\sigma_0, u](t), \\ -1, & \text{wenn } v > \mathcal{P}_r[\sigma_0, u](t). \end{cases} \quad (3.2.14)$$

b) Wenn $w_0 = 1$ ist und $v \leq \sigma_0$, dann gilt (3.2.14) für alle $t \in [0, T]$, so dass $v \neq \mathcal{P}_r[\sigma_0, u](t)$ ist.

3.2.3. Unterschiede der betrachteten Abhängigkeit vom Anfangszustand bei skalaren STOP- und PLAY-Operatoren in verschiedenen Publikationen

Es liegt in den Publikationen zu Hysterese-Operatoren ein uneinheitliches Vorgehen zur betrachteten Abhängigkeit von den Anfangszuständen im Zusammenhang mit dem STOP- und dem PLAY-Operator vor.

Die obigen Definitionen sind, wie die in [36, 70], so formuliert, dass sowohl der STOP- als auch der PLAY-Operator die Halbgruppeneigenschaft haben.

Allerdings gibt es auch andere Vorgehensweisen, was man beim Vergleichen der Resultate mit den entsprechenden Veröffentlichungen berücksichtigen muss:

3.2.8 Bemerkung. a) Bezüglich des Umgangs mit dem Anfangswert, entspricht der PLAY-Operators hier dem PLAY-Operator, wie er in [8, 32, 39] definiert wird. Dort wird jeweils eine Formulierung ähnlich zu der in Bem. 3.2.6 verwendet. Der PLAY-Operator in diesen Veröffentlichungen hat somit die Halbgruppeneigenschaft.

In [8, 32] wird dann jeweils auch noch ein STOP-Operator definiert. Für diesen Operator gilt dann aber die Formel in (3.2.6) nicht, sondern die Formel

$$\mathcal{P}_r[\sigma_0, u] + \mathcal{S}_r[\sigma_0, u] = u. \quad (\text{Achtung, gilt in dieser Arbeit nicht !!!}) \quad (3.2.15)$$

Dieser STOP-Operator hat dann nicht die Halbgruppeneigenschaft. Nimmt man bei diesem Operator $u(0) - \sigma_0$ als Anfangszustand, so liefert er $\mathcal{S}_r[\sigma_0, u]$ als Output. In dem Spezialfall, dass $\sigma_0 = 0$ und $u(0) = 0$ ist, stimmen die Resultate dieses STOP-Operators also mit dem hier betrachteten STOP-Operator überein.

b) Bezüglich des Umgangs mit den Anfangswerten entspricht der STOP-Operator hier dem STOP-Operator in [17, 37, 38, 40, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51]. Die dort definierten STOP-Operatoren haben somit die Halbgruppeneigenschaft.

In [17, 37, 38, 46, 45] wird dann jeweils auch noch ein PLAY-Operator definiert. Der PLAY-Operator wird dort dann aber so definiert, dass nicht die Formel in (3.2.6) gilt, sondern wieder die hier nicht gültige Formel in (3.2.15). Diese PLAY-Operatoren haben dann nicht die Halbgruppeneigenschaft. In [42, 59] wird nur ein derartiger PLAY-Operator definiert. Nimmt man bei diesem PLAY-Operator $u(0) - \sigma_0$ als Anfangszustand, so liefert er $\mathcal{P}_r[\sigma_0, u]$ als Output. In dem Spezialfall, dass $\sigma_0 = 0$ und $u(0) = 0$ ist, stimmen somit die Resultate dieses PLAY-Operators mit dem hier betrachteten PLAY-Operator überein.

c) Da im Folgenden auf Resultate in [37] verwiesen wird, sei darauf hingewiesen, dass in [37, II. (1.2)] zunächst mit \mathcal{P}_r ein PLAY-Operator definiert ist, so wie er im Punkt b) beschrieben wird, und der somit bezüglich der Anfangswerte nicht mit dem hier betrachteten übereinstimmt. Allerdings wird zusätzlich in [37, II. (2.6)–(2.8)] als Update für die Gedächtniskonfiguration ein Operator p_r definiert. Dieser stimmt mit dem hier betrachteten PLAY-Operator bezüglich des Verhaltens bezüglich der Anfangswerte im Wesentlichen überein; genauer gesagt gilt für jede beschränkte, Lipschitz-stetige Funktion λ mit Lipschitz-Konstante ≤ 1 und jedes $u \in C[0, T]$, dass $p_r(\lambda, u) = \mathcal{P}_r[\lambda(r), u]$.

3.2.4. Verallgemeinerter skalarer PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand

In diesem Abschnitt soll der verallgemeinerte skalare PLAY-Operator vorgestellt werden, wie er in [65] zur Vorbereitung der Definition eines PLAY-Operators für vektorwertige Input-Funktionen (siehe Abschnitt 6.2.2) eingeführt wird.

Wie schon in [65] ausgeführt wird, ist dieser ein Spezialfall des in [36, Kap 2.2, insb. (2.5)] vorgestellten verallgemeinerten PLAY-Operators, der hier in Abschnitt 3.2.5 diskutiert wird.

Es sei eine Funktion $\beta : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben, die differenzierbar ist, so dass $|\beta'(s)| < 1$ für alle $s \in [0, \infty[$ gilt. Man kann jetzt die Verallgemeinerung des PLAY-Operators betrachten, die sich ergibt, wenn man in (3.2.11) r durch den Wert von $\beta(u(t))$ ersetzt. Diese Gleichung soll für eine Funktion u , welche auf $[0, t]$ monoton ist, gelten, wobei hierbei für den Anfangswert noch $|u(0) - \sigma_0| \leq \beta(|u(0)|)$ vorausgesetzt wird.

Dann gilt für den Output v des entsprechenden Operators, dass $v(0) = \sigma_0$ ist, und dass

$$v(t) = \begin{cases} \sigma_0, & \text{wenn } |u(t) - \sigma_0| \leq \beta(|u(t)|), \\ u(t) - \text{sign}_{\pm 1}(u(t) - \sigma_0)\beta(|u(t)|), & \text{andernfalls.} \end{cases} \quad (3.2.16)$$

Dies entspricht dem PLAY-Operator aus [65, (11)], wenn diese Formel für ein festes $r > 0$ ausgewertet wird und dabei für das g in [65] gilt, dass $g(r, s) = \beta(|s|)$ ist.

Für $\beta \equiv r > 0$ erhält man den normalen PLAY-Operator \mathcal{P}_r .

Wenn σ_0 nicht im Intervall $[u(0) - \beta(u(0)), u(0) + \beta(u(0))]$ liegt, muss σ_0 durch seine Projektion auf diesen Intervall ersetzt werden, bevor die Formel angewandt werden kann. Dies führt insgesamt zu der folgenden Definition:

3.2.9 Definition. Es sei eine Funktion $\beta : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben, die differenzierbar ist, so dass $\beta'(s) < 1$ für alle $s \in [0, \infty[$ gilt.

- a) Für $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ und $u \in C_{\text{pm}}[0, T]$ (vgl. Def. 1.1.10) ist $\mathcal{P}_\beta^{\text{SAVD-sca.}}[\sigma_0, u] \in C_{\text{pm}}[0, T]$ definiert durch¹

$$\mathcal{P}_\beta^{\text{SAVD-sca.}}[\sigma_0, u](0) = \begin{cases} \sigma_0, & \text{wenn } |u(0) - \sigma_0| \leq \beta(|u(0)|), \\ u(0) - \text{sign}_{\pm 1}(u(0) - \sigma_0)\beta(|u(0)|), & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.2.17a)$$

$$\mathcal{P}_\beta^{\text{SAVD-sca.}}[\sigma_0, u](t) = \begin{cases} \sigma_1, & \text{wenn } |u(t) - \sigma_1| \leq \beta(|u(t)|), \\ u(t) - \text{sign}_{\pm 1}(u(t) - \sigma_1)\beta(|u(t)|), & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.2.17b)$$

mit $\sigma_1 = \mathcal{P}_\beta^{\text{SAVD-sca.}}[\sigma_0, u](t_1)$ für alle $0 \leq t_1 \leq t \leq T$, so dass u auf $[t_1, t]$ monoton ist.

- b) Der verallgemeinerte PLAY-Operator mit einem zustandsabhängigen Fließgrenzenabstand β $\mathcal{P}_\beta^{\text{SAVD-sca.}} : \mathbb{R} \times C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow C_{\text{pm}}[0, T]$ bildet $(\sigma_0, u) \in \mathbb{R} \times C_{\text{pm}}[0, T]$ auf die in a) definierte Funktion ab.

3.2.10 Bemerkung. Es sei β wie in Def. 3.2.9, so dass $\mathcal{P}_\beta^{\text{SAVD-sca.}}$ ein wohldefinierter Operator ist.

Der verallgemeinerte PLAY-Operator $\mathcal{P}_\beta^{\text{SAVD-sca.}}$ mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand β hat die Halbgruppeneigenschaft.

¹„SAVD“ sind die Anfangsbuchstaben der Autoren Serpico, d’Aquino, Visone und Davino von [65].

3.2.5. Verallgemeinerter skalarer PLAY-Operator mit zustandsabhängiger Fließgrenze

In leichter Umformulierung von [36, Kap 2.2, insb. (2.5)] und [70, Kap III.2] und Einbeziehung der Abänderung des Anfangszustandes erfolgt die folgende Definition:

3.2.11 Definition. Es seien stetige, monoton steigende Funktionen $\beta_l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\beta_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit

$$\beta_l(s) \geq \beta_r(s), \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (3.2.18)$$

gegeben.

a) Sei jetzt eine stetige, stückweise monotone Funktion $u : [0, T] \rightarrow D_0$ und $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, gegeben. Dann sei $\mathcal{P}_{\beta_l, \beta_r}^{\text{KP}}[\sigma_0, u](t) \in C_{\text{pm}}[0, T]$ definiert durch

$$\mathcal{P}_{\beta_l, \beta_r}^{\text{KP}}[\sigma_0, u](0) := \begin{cases} \beta_r(u(0)), & \text{wenn } \sigma_0 < \beta_r(u(0)), \\ \beta_l(u(0)), & \text{wenn } \sigma_0 > \beta_l(u(0)), \\ \sigma_0, & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.2.19a)$$

$$\mathcal{P}_{\beta_l, \beta_r}^{\text{KP}}[\sigma_0, u](t) = \begin{cases} \max\{\sigma_1, \beta_r(u(t))\}, & \text{wenn } u(t) < u(t_1), \\ \min\{\sigma_1, \beta_l(u(t))\}, & \text{wenn } u(t) > u(t_1), \\ \sigma_1 & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (3.2.19b)$$

mit $\sigma_1 = \mathcal{P}_{\beta_l, \beta_r}^{\text{KP}}[\sigma_0, u](t_1)$ für alle $0 \leq t_1 \leq t \leq T$, so dass u auf $[t_1, t]$ monoton ist.

b) Der verallgemeinerte PLAY-Operator mit zwei zustandsabhängigen Fließgrenzen β_l und β_r ist der Operator $\mathcal{P}_{\beta_l, \beta_r}^{\text{KP}} : \mathbb{R} \times C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow C_{\text{pm}}[0, T]$, der $(\sigma_0, u) \in \mathbb{R} \times C_{\text{pm}}[0, T]$ auf die in a) definierte Funktion abbildet.

3.2.12 Bemerkung. Es seien β_l, β_r wie in Def. 3.2.11 gegeben, so dass der verallgemeinerte PLAY-Operator $\mathcal{P}_{\beta_l, \beta_r}^{\text{KP}}$ mit zwei zustandsabhängigen Fließgrenzen β_l und β_r wohldefiniert ist. Dann gilt:

Der verallgemeinerte PLAY-Operator $\mathcal{P}_{\beta_l, \beta_r}^{\text{KP}}$ hat die Halbgruppeneigenschaft.

3.2.13 Bemerkung. Es sei $\beta : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ wie in Def. 3.2.9 gegeben, so dass der verallgemeinerte PLAY-Operator $\mathcal{P}_{\beta}^{\text{SAVD-sca.}}$ mit einen zustandsabhängigen Fließgrenzenabstand β wohldefiniert ist. Setzt man

$$\beta_l(s) = s + \beta(s) \quad \text{und} \quad \beta_r(s) = s - \beta(s),$$

dann gilt für den verallgemeinerte PLAY-Operator $\mathcal{P}_{\beta_l, \beta_r}^{\text{KP}}$ mit zwei zustandsabhängigen Fließgrenzen β_l und β_r wie Def. 3.2.11, dass

$$\mathcal{P}_{\beta_l, \beta_r}^{\text{KP}} = \mathcal{P}_{\beta}^{\text{SAVD-sca.}}. \quad (3.2.20)$$

3.3. PRANDTL-ISHLINSKII-Operator

Analog zu [8, 17, 32, 36, 37, 70] erfolgt die Definition von PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren über eine gewichtete Durchschnittsbildung der aktuellen Werte der PLAY- oder der STOP-Operatoren zu verschiedenen Fließgrenzen.

3.3.1 Definition. Es sei

$$\Lambda := \left\{ \lambda : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \mid \lambda \text{ ist beschränkt und} \right. \\ \left. \text{Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstante } \leq 1 \right\}, \quad (3.3.1)$$

$$\Lambda_0 := \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \exists R > 0 : \quad \forall r \geq R : \lambda(r) = 0 \right\}. \quad (3.3.2)$$

3.3.2 Definition. Es sei $\eta : [0, \infty[\rightarrow (-\infty, 0]$ eine rechtseitig stetige, monoton steigende Funktion mit $\eta_\infty := \lim_{s \rightarrow \infty} \eta(s) \leq 0$.

a) Für $\lambda_0 \in \Lambda$ und $u \in C[0, T]$ sind $\mathcal{PI}_{\mathcal{P}}[\lambda_0, u] \in C[0, T]$ und $\mathcal{PI}_{\mathcal{S}}[\lambda_0, u] \in C[0, T]$ durch die Stieltjes-Integralformeln

$$\mathcal{PI}_{\mathcal{S}}[\lambda_0, u](t) = \int_0^\infty \mathcal{S}_r[\lambda_0(r), u](t) \, d\eta(r), \quad (3.3.3)$$

$$\mathcal{PI}_{\mathcal{P}}[\lambda_0, u](t) = \int_0^\infty \mathcal{P}_r[\lambda_0(r), u](t) \, d\eta(r) \quad (3.3.4)$$

definiert.

b) Der PRANDTL-ISHLINSKII-Operator

$$\mathcal{PI}_{\mathcal{S}} : \Lambda \times C[0, T] \rightarrow C[0, T] \quad (3.3.5)$$

vom STOP-Typ ist der Operator, der $(\lambda_0, u) \in \Lambda \times C[0, T]$ auf die in a) definierte Funktion $\mathcal{PI}_{\mathcal{S}}[\lambda_0, u] \in C[0, T]$ abbildet.

c) Der PRANDTL-ISHLINSKII-Operator

$$\mathcal{PI}_{\mathcal{P}} : \Lambda \times C[0, T] \rightarrow C[0, T] \quad (3.3.6)$$

vom PLAY-Typ ist der Operator, der $(\lambda_0, u) \in \Lambda \times C[0, T]$ auf die in a) definierte Funktion $\mathcal{PI}_{\mathcal{P}}[\lambda_0, u] \in C[0, T]$ abbildet.

In einer Modifikation von [70, (4.11)] gilt:

3.3.3 Bemerkung. Es sei η wie in Def. 3.3.2, so dass $\mathcal{PI}_{\mathcal{S}}$ und $\mathcal{PI}_{\mathcal{P}}$ wohldefinierte Operatoren sind. Dann gilt für $(\lambda_0, u) \in \Lambda \times C[0, T]$, dass $u(0) - \lambda_0$ ebenfalls ein Element von Λ ist. Weiterhin liefert (3.2.6) für alle $t \geq 0$, dass

$$\begin{aligned} & \mathcal{PI}_{\mathcal{S}}[u(0) - \lambda_0, u](t) + \mathcal{PI}_{\mathcal{P}}[\lambda_0, u](t) \\ &= \int_0^\infty \mathcal{S}_r[u(0) - \lambda_0(r), u](t) \, d\eta(r) + \int_0^\infty \mathcal{P}_r[\lambda_0(r), u](t) \, d\eta(r) \\ &= u(t) \int_0^\infty d\eta(r) = u(t) (\eta_\infty - \eta(0)). \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Zur Diskussion der Herleitung von η aus Spannungs-Dehnungskurven sei auf [17, 32] verwiesen, wobei die dort betrachtete Funktion η hier gerade $-\eta$ wäre.

3.4. Generalisierte PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren

Analog zu [32, 33] betrachten wir generalisierte PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren:

3.4.1 Definition. Es seien $g_0, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, so dass gilt:

- i) Die Funktionen g_0 und g sind monoton steigende, lokal Lipschitz-stetige Funktionen, g ist eine ungerade Funktion, es ist $\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) = \infty$, und es gilt $g'(u) > 0$ fast überall auf \mathbb{R} .
- ii) Die Funktion ϕ ist ungerade und es ist $\varphi(s) \geq 0$ fast überall auf \mathbb{R} . Es sei

$$\eta(r) := - \int_r^\infty \varphi(s) ds, \quad \forall r \geq 0, \quad (3.4.1)$$

und es seien \mathcal{PI}_S und \mathcal{PI}_P die sich dafür in Def. 3.3.2 ergebenden PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren.

Dann lautet die Definition:

- a) Die Abbildung $\mathcal{GPI}_S : \Lambda \times C[0, T] \rightarrow C[0, T]$, die definiert ist durch

$$\mathcal{GPI}_S[\lambda_0, u](t) = g_0(u(t)) + \mathcal{PI}_S[\lambda_0, g \circ u](t), \quad (3.4.2)$$

für alle $(\lambda_0, u) \in C[0, T] \rightarrow C[0, T]$, wird *generalisierter PRANDTL-ISHLINSKII-Operator vom STOP-Typ* genannt.

- b) Die Abbildung $\mathcal{GPI}_P : \Lambda \times C[0, T] \rightarrow C[0, T]$, die definiert ist durch

$$\mathcal{GPI}_P[\lambda_0, u](t) := g_0(u(t)) + \mathcal{PI}_P[\lambda_0, g \circ u](t), \quad (3.4.3)$$

für alle $(\lambda_0, u) \in C[0, T] \rightarrow C[0, T]$, wird *generalisierter PRANDTL-ISHLINSKII-Operator vom PLAY-Typ* genannt.

3.4.2 Bemerkung. Es seien g_0, g, φ und η wie in (3.4.1) gegeben, so dass \mathcal{GPI}_S und \mathcal{GPI}_P wohldefiniert sind. Es seien $(\lambda_0, u) \in \Lambda \times C[0, T]$ und alle $t \geq 0$ beliebig.

- a) Es gilt

$$\mathcal{PI}_S[\lambda_0, u](t) = \int_0^\infty \mathcal{S}_r[\lambda_0(r), u](t) \varphi(r) dr, \quad (3.4.4)$$

$$\mathcal{PI}_P[\lambda_0, u](t) = \int_0^\infty \mathcal{P}_r[\lambda_0(r), u](t) \varphi(r) dr. \quad (3.4.5)$$

- b) Aus (3.4.2) und (3.4.3) ergibt sich

$$\mathcal{GPI}_S[\omega, u](t) := g_0(u(t)) + \int_0^\infty \mathcal{S}_r[\lambda_0(r), g \circ u](t) \varphi(r) dr, \quad (3.4.6)$$

$$\mathcal{GPI}_P[\omega, u](t) := g_0(u(t)) + \int_0^\infty \mathcal{P}_r[\lambda_0(r), g \circ u](t) \varphi(r) dr. \quad (3.4.7)$$

- c) Aus (3.3.7) ergibt sich, dass

$$\mathcal{GPI}_S[g(u(0)) - \lambda_0, u](t) + \mathcal{GPI}_P[\lambda_0, u](t) = g(u(t)) \int_0^\infty \varphi(s) ds. \quad (3.4.8)$$

3.5. PREISACH-Operatoren

3.5.1. Ursprüngliche Formulierung des PREISACH-Operators mit Hilfe von RELAY-Operatoren

Die folgende Beschreibung des PREISACH-Operators mit Hilfe von RELAY-Operatoren entspricht der normalen Darstellung des PREISACH-Operators wie in [8, 36, 37, 70] und folgt [8, (4.21)]:

3.5.1 Definition. Es sei eine Funktion $\theta \in L^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ gegeben. Es sei

$$W_0 := \{w : [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\} \mid w \text{ ist messbar}\}. \quad (3.5.1)$$

a) Es seien Funktionen $w_0 \in W_0$ und $u \in C[0, T]$ gegeben. Dann ist $\mathcal{PR}_\theta[w_0, u] : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathcal{PR}_\theta[w_0, u](t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \theta(r, s) \mathcal{R}_{s-r, s+r}[w_0(r, s), u](t) ds dr, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.5.2)$$

b) Der PREISACH-Operator $\mathcal{PR}_\theta : W_0 \times C[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ist der Operator, der $(w_0, u) \in W_0 \times C[0, T]$ auf die in a) definierte Funktion $\mathcal{PR}_\theta[w_0, u]$ abbildet.

3.5.2 Bemerkung. Meist werden bei PREISACH-Operatoren nicht beliebige Anfangszustände $w_0(r, s)$ für die RELAY-Operatoren $\mathcal{R}_{s-r, s+r}$ zugelassen, sondern nur solche, bei denen die Teilgebiete in $[0, \infty[\times \mathbb{R}$ auf denen w_0 konstant ist, durch den Graph einer Funktion auf $[0, \infty[$ getrennt werden.

Somit geht man häufig davon aus, dass es eine Funktion $\lambda_0 \in \Lambda_0$ mit Λ_0 wie in Def. 3.3.1 gibt, so dass

$$w_0(s, r) = \begin{cases} -1, & \text{wenn } s \geq \lambda_0(r), \\ +1, & \text{wenn } s < \lambda_0(r). \end{cases} \quad (3.5.3)$$

Wenn man jetzt die Kurven als Anfangswert für den PREISACH-Operator betrachtet, dann erhält man:

3.5.3 Definition. Es sei eine Funktion $\theta \in L^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ gegeben.

Der mit Anfangskurven formulierte PREISACH-Operator $\mathcal{PR}_\theta^{\text{init.-curve}} : \Lambda_0 \times C[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ist der Operator, der $(\lambda_0, u) \in \Lambda_0 \times C[0, T]$ auf $\mathcal{PR}_\theta[w_0, u]$ mit w_0 wie in (3.5.3) abbildet.

3.5.4 Bemerkung. Es sei eine Funktion $\theta \in L^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ gegeben.

Für den mit Anfangskurven formulierten PREISACH-Operator $\mathcal{PR}_\theta^{\text{init.-curve}}$ und $(\lambda_0, u) \in \Lambda_0 \times C[0, T]$ gilt für alle $t \in [0, T]$, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{PR}_\theta^{\text{init.-curve}}[\lambda_0, u](t) = & \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0(r)} \theta(r, s) \mathcal{R}_{s-r, s+r}[-1, u](t) ds \right. \\ & \left. + \int_{\lambda_0(r)}^{+\infty} \theta(r, s) \mathcal{R}_{s-r, s+r}[+1, u](t) ds \right) dr. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

3.5.2. Formulierung des PREISACH-Operators unter Verwendung des PLAY-Operators

Die folgende Definition ist analog zu [8, Def. 2.4.2] oder [37, (II.2.6)].

3.5.5 Definition. a) Für $\lambda_0 \in \Lambda_0$ mit Λ_0 wie in Def. 3.3.1 und $u \in C[0, T]$ sei $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u] : [0, T] \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dadurch definiert, dass

$$\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, r) := \mathcal{P}_r[\lambda_0(r), u](t), \quad \forall t \in [0, T], r \geq 0. \quad (3.5.5)$$

b) Für $\lambda_0 \in \Lambda_0$, $u \in C[0, T]$ und $t \in [0, T]$ sei $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, \cdot) \in \Lambda_0$ die Abbildung, die $r \in [0, \infty[$ auf $\mathcal{P}[\lambda_0, u](t, r)$ wie a) abbildet.

c) Der **PLAY-PREISACH-Gedächtnis-Operator** $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}} : \Lambda_0 \times C[0, T] \rightarrow \text{Map}([0, T], \Lambda_0)$ ist der Operator, der $(\lambda_0, u) \in \Lambda_0 \times C[0, T]$ auf die Abbildung $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u] \in \text{Map}([0, T], \Lambda_0)$ abbildet, die $t \in [0, T]$ auf $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, \cdot) \in \Lambda_0$ wie in b) abbildet.

3.5.6 Bemerkung. Der **PLAY-PREISACH-Gedächtnis-Operator** $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}$ ist ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft.

Kombiniert man die obige Darstellung der Anfangszustände des RELAY-Operators in (3.5.3) mit Lemma 3.2.7 und Def. 3.5.5 dann erhält man, analog zu [8, (2.4.6), (2.1.28)] oder, dank Bemerkung 3.2.8.c), [37, Lemma II.3.6]:

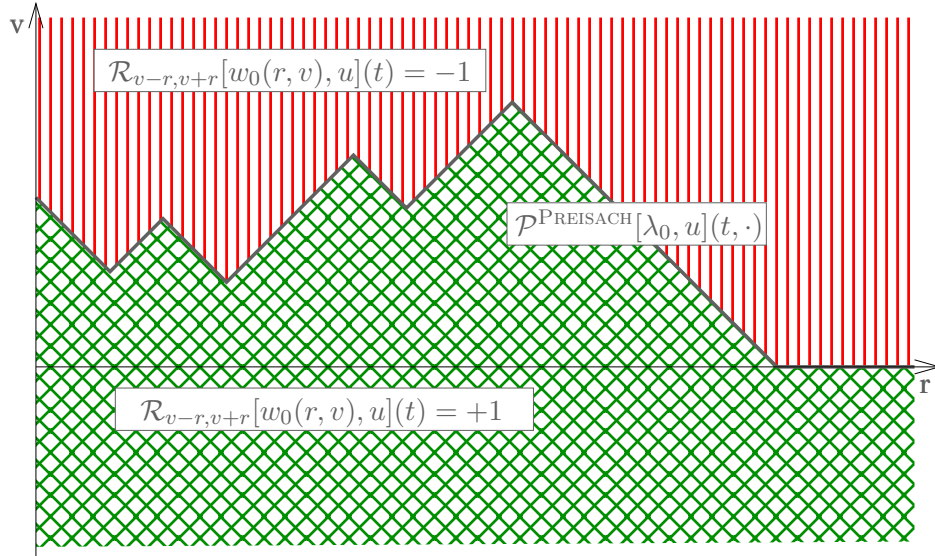


Abbildung 3.6.: Die RELAY-Operatoren $\mathcal{R}_{v-r, v+r}[w_0(r, v), u](t)$, so dass (v, r) über dem Graphen des $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, \cdot)$ liegt, haben dem Wert -1 , diejenigen, für die (v, r) unter dem Graphen liegt, haben den Wert $+1$

3.5.7 Lemma. Es seien $\theta \in L^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$, $u \in C[0, T]$ und $\lambda_0 \in \Lambda_0$ mit Λ_0 wie in Def. 3.3.1 gegeben. Es sei $w_0 : [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ definiert durch (3.5.3).

3. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

a) Es gilt für alle $r \in [0, \infty[$, $v \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, T]$, so dass $v \neq \mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, r)$ ist:

$$\mathcal{R}_{v-r, v+r}[w_0(r, v), u] = \begin{cases} +1, & \text{wenn } v < \mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, r), \\ -1, & \text{wenn } v > \mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, r). \end{cases} \quad (3.5.6)$$

b) Für alle $t \in [0, T]$ gilt

$$\mathcal{PR}_{\theta}^{\text{init.-curve}}[\lambda_0, u](t) = \mathcal{PR}_{\theta}[w_0, u](t) = \int_0^{\infty} \Theta(r, \mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, r)) \, dr \quad (3.5.7)$$

mit $\Theta : [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Theta(r, s) = \int_{-\infty}^s \theta(r, \sigma) \, d\sigma - \int_s^{\infty} \theta(r, \sigma) \, d\sigma. \quad (3.5.8)$$

3.5.3. Verallgemeinerter PREISACH-Operator mit verallgemeinertem skalaren PLAY-Operator wie im Abschnitt 3.2.4

Man kann (3.5.7) verallgemeinern, indem man $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, r) = \mathcal{P}_r[\lambda_0(r), u](t)$ ersetzt durch den verallgemeinerten skalaren PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand wie in (3.2.16). Dies entspricht dem verallgemeinerten PREISACH-Operator wie er in [65, (12)] mit $g(r, s) = \beta(|s|)$ definiert wird.

3.5.8 Definition. Es sei für jedes $r > 0$ eine Funktion $\beta_r : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben, die differenzierbar ist, so dass $\beta'_r(s) < 1$ für alle $s \in [0, \infty[$ gilt. Weiterhin sei $\beta_0 : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ definiert durch $\beta_0 \equiv 0$.

Es sei $\theta \in L^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ gegeben.

a) Es seien $u \in C[0, T]$ und $\lambda_0 \in \Lambda_0$ mit Λ_0 wie in Def. 3.3.1 gegeben. Dann ist $\mathcal{PR}_{(\beta_r)_{r \geq 0}}^{\text{SAVD-sca.}}[\lambda_0, u] : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathcal{PR}_{(\beta_r)_{r \geq 0}}^{\text{SAVD-sca.}}[\lambda_0, u](t) = \int_0^{\infty} \Theta(r, \mathcal{P}_{\beta_r}^{\text{SAVD-sca.}}[\lambda_0(r), u](t)) \, dr \quad (3.5.9)$$

mit Θ wie in (3.5.8).

b) Der PREISACH-Operator

$$\mathcal{PR}_{(\beta_r)_{r \geq 0}}^{\text{SAVD-sca.}} : \Lambda_0 \times C[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$$

der durch skalare PLAY-Operatoren mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand definiert wird, ist die Abbildung, die $(\lambda_0, u) \in \Lambda_0 \times C[0, T]$ auf $\mathcal{PR}_{(\beta_r)_{r \geq 0}}^{\text{SAVD-sca.}}[\lambda_0, u]$ in a) abbildet.

3.5.4. Operatoren vom PREISACH-Typ

Die folgende Definition folgt [8, Def. 2.4.2]:

3.5.9 Definition. Sei $Q : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

- a) Für $\lambda_0 \in \Lambda_0$ $u \in C[0, T]$ sei $\mathcal{PR}_Q[\lambda_0, u] : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung, die $t \in [0, T]$ auf $Q(\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}[\lambda_0, u](t, \cdot))$ abbildet.
- b) Der von Q erzeugte Operator von PREISACH-Typ ist die Abbildung $\mathcal{PR}_Q : \Lambda_0 \times C[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$, die $(\lambda_0, u) \in \Lambda_0 \times C[0, T]$ auf die in a) definierter Funktion $\mathcal{PR}_Q[\lambda_0, u] : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ abbildet.

3.5.10 Bemerkung. Sei $Q : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Der von Q erzeugte Operator von PREISACH-Typ \mathcal{PR}_Q ist ein Hysterese-Operator.

Das Lemma 3.5.7 liefert, dass die mit Anfangskurven formulierten PREISACH-Operatoren gerade Operatoren vom PREISACH-Typ sind.

3.5.11 Korollar. Es seien $\theta \in L^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ gegeben.

Sei $Q : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$Q(\lambda) := \int_0^\infty \Theta(r, \lambda(r)) \, dr, \quad \forall \lambda \in \Lambda_0 \quad (3.5.10)$$

mit $\Theta : [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch (3.5.8). Dann gilt

$$\mathcal{PR}_\theta^{\text{init.-curve}} = \mathcal{PR}_Q. \quad (3.5.11)$$

4. Madelungsche Regeln, Kongruenz-Eigenschaft und Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen

4.1. Madelungsche Regeln und Kongruenz-Eigenschaft

4.1.1. Übersicht über die Madelung'schen Regeln

4.1.1 Bemerkung. In dem in [55] veröffentlichten Auszug aus der Dissertation von Madelung werden die folgenden Regeln formuliert, um die Beobachtungen bei Magnetisierungsexperimenten zu beschreiben:

Wir wollen zur Vereinfachung der Bezeichnungen einen „Umkehrpunkt“ einen solchen nennen, in dem wir den Sinn der Änderung von Feld- und Magnetisierungsvektor umkehren.

- i) Jede Kurve \overline{A} , die im Inneren der Hysteresefläche verläuft, ist durch den Umkehrpunkt A eindeutig definiert, aus dem sie hervorgeht.*
- ii) Macht man irgend einen Punkt dieser Kurve \overline{A} selbst zu einem neuen Umkehrpunkt B , so führt die durch B definierte Kurve \overline{B} wieder zu dem Anfangspunkt A der Kurve \overline{A} zurück.*
- iii) Wenn die im Umkehrpunkt C auf \overline{B} (Original „in C auf B “) entspringende Magnetisierungskurve \overline{C} über B hinaus fortgesetzt wird, so läuft sie als Fortsetzung der Kurve \overline{A} weiter, auf der wir ursprünglich nach B gelangt waren, also so, als ob der Zyklus $B - C - B$ gar nicht vorhanden gewesen wäre.*

4.1.2 Bemerkung. In [8, S. 27] werden als *Madelung's rules* formuliert:

- i) Any curve Γ_1 emanating from a turning point A of the input-output graph (see Fig. 4.1) is uniquely determined by the coordinates of A .*
- ii) If any point B on the curve Γ_1 becomes a new turning point, then the curve Γ_2 originating at B leads back to the point A .*
- iii) If the curve Γ_2 is continued beyond the point A , then it coincides with the continuation of the curve Γ which led to the point A before the $\Gamma_1 - \Gamma_2$ cycle was traversed.*

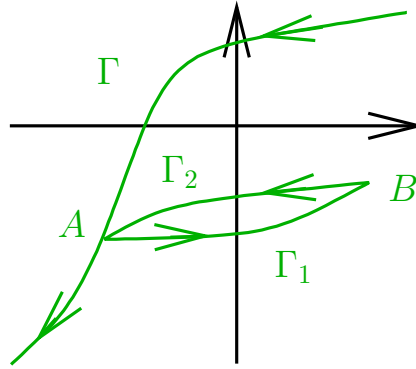


Abbildung 4.1.: Beispiel für die Madelungschen Regeln, folgt [8, Fig. 2.5]

Man sieht, dass bei den in [8, S. 27] formulierten Bedingungen die dritte Bedingung stärker ist, als die ursprünglich von Madelung formulierte. In der ursprünglichen Formulierung würde nur dann verlangt werden, dass der Zyklus $\Gamma_1 - \Gamma_2$ im Folgenden vergessen wird, wenn der Punkt A bereits auf dem Teil einer Kurve läge, die von einem Umkehrpunkt ausginge.

Die zweite Madelungsche Regel wird auch als *return point memory* Eigenschaft beschrieben, die Kombination von zweiter und dritter wird manchmal auch als *wiping out property* bezeichnet; dies stimmt allerdings nicht ganz mit der entsprechenden Formulierung in [56, Kap 1.2] überein.

4.1.2. Diskussion der ersten Madelungschen Regel

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ gegeben.

Betrachtet man die erste Madelungsche Regel, so könnte man sie so interpretieren, dass sie Informationen über die Teile der Output-Funktion liefert, die sich ergeben, wenn man eine Input-Funktion betrachtet, und diese zu verschiedenen Zeiten am gleichen Punkt der Hysteresis-Schleifen einen Umkehrpunkt hat, und dann verlangt, dass man dabei jeweils das gleichen Input-Output-Verhalten erhält.

Die stärkere, aber allgemein verwendete Interpretation, dass diese Gleichheit des Input-Output-Verhaltens auch für verschiedene Input-Funktionen vorliegen soll, führt zu der folgenden Definition:

4.1.3 Definition. Es sei ein Hysteresis-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq \text{Map}[0, T]$ gegeben. Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die erste Madelungsche Regel gilt, wenn für alle Funktionen $u, v \in D(\mathcal{H})$, alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$ gilt:

Wenn

- a) u auf $[t_1, t_3]$ stetig ist, v auf $[s_1, s_3]$ stetig ist,
- b) u auf $[t_1, t_2]$ und auf $[t_2, t_3]$ monoton ist,
- c) v auf $[s_1, s_2]$ und auf $[s_2, s_3]$ monoton ist,

d)

$$u(t_1) = v(s_1) = u(t_3) = v(s_3) \neq v(s_2) = u(t_2), \quad (4.1.1)$$

e) und

$$\mathcal{H}[u](t_2) = \mathcal{H}[v](s_2) \quad (4.1.2)$$

ist,

dann folgt,

$$\mathcal{H}[u](t_3) = \mathcal{H}[v](s_3). \quad (4.1.3)$$

In dem Fall, dass man einen Hysterese-Operator mit Anfangszustand betrachtet, kann man bei der ersten Madelungsche Regel neben Variationen der Input-Funktion auch Variationen des Anfangszustands betrachten, und verlangen, dass auch dann ein gleichartiges Input-Output-Verhalten vorliegt. Dies führt zu:

4.1.4 Definition. Es seien eine nichtleere Menge Z und ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit einem Anfangszustand in Z gegeben.

Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die erste Madelungsche Regel gilt, wenn für alle $z, z' \in Z$, alle $u \in D(\mathcal{H}[z, \cdot])$, alle $v \in D(\mathcal{H}[z', \cdot])$, alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$ gilt:

Wenn die Voraussetzungen a)–d) in Definition 4.1.3 erfüllt sind, und

$$\mathcal{H}[z, u](t_2) = \mathcal{H}[z', v](s_2), \quad (4.1.4)$$

gilt, dann folgt dass

$$\mathcal{H}[z, u](t_3) = \mathcal{H}[z', v](s_3). \quad (4.1.5)$$

4.1.5 Bemerkung. Es seien Z und \mathcal{H} wie in Definition 4.1.4, so dass für \mathcal{H} die erste Madelungsche Regel gilt. Dann folgt für alle $z \in Z$, dass für $\mathcal{H}[z, \cdot]$ die erste Madelungsche Regel gilt.

Man kann die Regel, dass der Kurvenabschnitt nach dem Umkehrpunkt alleine durch den Umkehrpunkt festgelegt wird, auch so verstehen, dass sie auch beim Zusammenlaufen von zwei Hystereseschleifen nur gelten muss, wenn auch die vorherigen Kurvenabschnitte gleich sind. Dies führt zu einer abgeschwächten Versionen der ersten Madelungschen Regel:

4.1.6 Definition. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq \text{Map}[0, T]$ gegeben.

Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die abgeschwächte Form der ersten Madelungschen Regel gilt, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Für alle Funktionen $u, v \in D(\mathcal{H})$, alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$ gilt:

Wenn die Voraussetzungen a)–d) in Definition 4.1.3 erfüllt sind und für alle $t \in [t_1, t_2]$ und alle $s \in [s_1, s_2]$ mit $u(t) = v(s)$ gilt, dass $\mathcal{H}[u](t) = \mathcal{H}[v](s)$ ist, dann folgt, dass (4.1.3) gilt.

4.1.7 Definition. Es sei eine nichtleere Menge Z und ein Hysteresese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit einem Anfangszustand in Z gegeben.

Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die abgeschwächte Form der ersten Madelung'schen Regel gilt, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für alle $z, z' \in Z$ und alle Funktionen $u \in D(\mathcal{H}[z, \cdot])$, und $v \in D(\mathcal{H}[z', \cdot])$, alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$, gilt:

Wenn die Voraussetzungen a)–d) in Definition 4.1.3 erfüllt sind und für alle $t \in [t_1, t_2]$ und alle $s \in [s_1, s_2]$ mit $u(t) = v(s)$ gilt, dass $\mathcal{H}[z, u](t) = \mathcal{H}[z', v](s)$ ist, folgt, dass (4.1.5) gilt.

4.1.3. Diskussion der zweiten und dritten Madelung'schen Regel

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ gegeben.

Zur Vorbereitung der Diskussion betrachten wir die eine Folgerung aus [8, Lemma 2.2.4 mit $t_E := 1]$

4.1.8 Lemma. Seien zwei stetige, monotone Funktionen $f_1, f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f_1(0) = f_2(0)$ und $f_1(1) = f_2(1)$ ist. Dann gibt es zwei stetige, monoton steigende Funktionen $\zeta_1, \zeta_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, so dass

$$\zeta_1(0) = 0 = \zeta_2(0), \quad \zeta_1(1) = 1 = \zeta_2(1), \quad f_1 \circ \zeta_1 = f_2 \circ \zeta_2. \quad (4.1.6)$$

4.1.9 Lemma. Seien zwei stetige Funktion $u, v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0, \dots, t_n \in [0, T]$ und $s_0, \dots, s_n \in [0, T]$ gegeben, so dass $t_0 = 0 = s_0$, $t_n = T = s_n$ und $u(0) = v(0)$ ist und außerdem für alle $i = 1, \dots, n$ gilt dass $t_{i-1} < t_i$, $s_{i-1} < s_i$, u auf $[t_{i-1}, t_i]$ monoton ist, v auf $[s_{i-1}, s_i]$ monoton ist und $u(t_i) = v(s_i)$ ist.

Dann gibt es zulässige Zeittransformationen ϕ_u und ϕ_v von $[0, T]$, so dass

$$\phi_u \left(\frac{i}{n} T \right) = t_i, \quad \phi_v \left(\frac{i}{n} T \right) = s_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad (4.1.7)$$

$$u \circ \phi_u = v \circ \phi_v. \quad (4.1.8)$$

Beweis. Für alle a, b mit $a < b$ sei $\psi_{[a,b]} : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definiert durch $\psi_{[a,b]}(\lambda) = (1 - \lambda)a + \lambda b$.

Für alle $i = 1, \dots, n$ sind $u \circ \psi_{[t_{i-1}, t_i]}$ und $v \circ \psi_{[s_{i-1}, s_i]}$ zwei monotone Funktionen auf $[0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} u \circ \psi_{[t_{i-1}, t_i]}(0) &= u(t_{i-1}) = v(s_{i-1}) = v \circ \psi_{[s_{i-1}, s_i]}(0), \\ u \circ \psi_{[t_{i-1}, t_i]}(1) &= u(t_i) = v(s_i) = v \circ \psi_{[s_{i-1}, s_i]}(1). \end{aligned}$$

Wendet man jetzt das Lemma 4.1.8 an, so erhält man zwei stetige, monoton steigende Funktionen $\zeta_{u,i}, \zeta_{v,i} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, so dass $\zeta_{u,i}(0) = 0$, $\zeta_{v,i}(0) = 0$, $\zeta_{u,i}(1) = 1$, $\zeta_{v,i}(1) = 1$, und

$$u \circ \psi_{[t_{i-1}, t_i]} \circ \zeta_{u,i} = v \circ \psi_{[s_{i-1}, s_i]} \circ \zeta_{v,i}$$

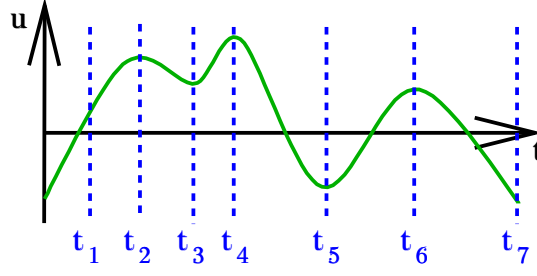


Abbildung 4.2.: Eine Funktion, die auf $[t_1, t_4]$ und auf $[t_4, t_7]$ jeweils einen Madelungzyklus beschreibt

ist. Definiert man jetzt ϕ_u und ϕ_v auf $\left[\frac{(i-1)T}{n}, \frac{iT}{n}\right]$ durch

$$\phi_u(t) = \psi_{[t_{i-1}, t_i]} \circ \zeta_{u,i} \left(\frac{t}{T}n - (i-1) \right), \quad (4.1.9)$$

$$\phi_v(t) = \psi_{[s_{i-1}, s_i]} \circ \zeta_{v,i} \left(\frac{t}{T}n - (i-1) \right), \quad (4.1.10)$$

dann erhält man die Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften. \square

In [8, Def. 2.6] wird der Madelungzyklus für Strings definiert, was sich in eine Definition für stückweise monotone Funktionen umformulieren lässt. Die folgende Definition verallgemeinert diese etwas:

4.1.10 Definition. Sei eine Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und es seien $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ gegeben. Dann sagt man, dass u auf Intervall $[t_1, t_4]$ einen Madelungzyklus mit den Umkehrpunkten t_2 und t_3 beschreibt, wenn u auf $[t_1, t_4]$ stetig ist, u auf Intervallen $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ und $[t_3, t_4]$ monoton ist, und

$$(u(t_2) - u(t_1))(u(t_3) - u(t_2)) < 0, \quad (u(t_3) - u(t_2))(u(t_4) - u(t_3)) < 0, \quad (4.1.11)$$

$$(u(t_2) - u(t_1))(u(t_4) - u(t_2)) \geq 0, \quad (u(t_3) - u(t_1))(u(t_4) - u(t_3)) \geq 0. \quad (4.1.12)$$

4.1.11 Bemerkung. Die in der Abbildung 4.2 dargestellte Funktion beschreibt auf $[t_1, t_4]$ einen Madelungzyklus mit den Umkehrpunkten t_2 und t_3 und auf $[t_4, t_7]$ einen Madelungzyklus mit den Umkehrpunkten t_5 und t_6 .

4.1.12 Bemerkung. Sei eine Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und es seien $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ gegeben, so dass u auf Intervall $[t_1, t_4]$ einen Madelungzyklus mit den Umkehrpunkten t_2 und t_3 beschreibt.

a) Dann gilt

$$u([t_1, t_2]) = \text{conv}(u(t_1), u(t_2)), \quad (4.1.13)$$

$$u([t_2, t_3]) = \text{conv}(u(t_2), u(t_3)), \quad (4.1.14)$$

$$u([t_3, t_4]) = \text{conv}(u(t_3), u(t_4)). \quad (4.1.15)$$

4. *Madelungsche Regeln, Kongruenz-Eigenschaft, Umkehrbereich-Aktualisierungsfkt.*

b) Dann gilt für alle $s_{12} \in [t_1, t_2]$, $s_{23} \in [t_2, t_3]$ und $s_{34} \in [t_3, t_4]$, dass

$$u([t_1, s_{12}]) = \text{conv}(u(t_1), u(s_{12})), \quad u([s_{12}, t_2]) = \text{conv}(u(s_{12}), u(t_2)), \quad (4.1.16)$$

$$u([t_2, s_{23}]) = \text{conv}(u(t_2), u(s_{23})), \quad u([s_{23}, t_3]) = \text{conv}(u(s_{23}), u(t_3)), \quad (4.1.17)$$

$$u([t_3, s_{34}]) = \text{conv}(u(t_3), u(s_{34})), \quad u([s_{34}, t_4]) = \text{conv}(u(s_{34}), u(t_4)). \quad (4.1.18)$$

c) Es ist $u([t_2, t_3]) = u([t_3, t_4])$.

d) Dann gilt $u([t_2, t_3]) \subseteq u([t_1, t_2])$ oder $u([t_2, t_3]) \supset u([t_1, t_2])$.

e) Wenn $u(t_1) = u(t_3)$ ist, dann gilt $u([t_2, t_3]) = u([t_1, t_2])$.

Nun kann man die zweite und dritte Madelungsche Regel wie in Bem. 4.1.2 jeweils als Bedingungen an den Operator formulieren:

4.1.13 Definition. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ gegeben.

a) Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die *zweite Madelungsche Regel* gilt, wenn für alle Funktionen $u \in D(\mathcal{H})$, und alle $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, so dass u auf dem Intervall $[t_1, t_4]$ einen Madelungzyklus mit den Umkehrpunkten t_2 und t_3 beschreibt und $u(t_2) = u(t_4)$ ist, gilt dass $\mathcal{H}[u](t_2) = \mathcal{H}[u](t_4)$.

b) Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die *dritte Madelungsche Regel* gilt, wenn für alle Funktionen $u, v \in D(\mathcal{H})$, und alle $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, so dass u auf dem Intervall $[t_1, t_4]$ einen Madelungzyklus mit den Umkehrpunkten t_2 und t_3 beschreibt, $u(s) = v(s)$ für alle $s \in [0, t_1] \cup [t_4, T]$ gilt, und v auf $[t_1, t_4]$ monoton ist, folgt, dass $\mathcal{H}[u](t) = \mathcal{H}[v](t)$ für alle $t \in [t_4, T]$ ist.

4.1.14 Definition. Es sei Z eine nichtleere Menge. Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \mathbb{R} \times \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}([0, T], \mathbb{R})$ ein Hysterese-Operator mit Anfangszustand in Z .

a) Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die *zweite Madelungsche Regel* gilt, wenn für $z \in Z$ gilt, dass für $\mathcal{H}[z, \cdot]$ die zweite Madelungsche Regel gilt.

b) Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die *dritte Madelungsche Regel* gilt, wenn für $z \in Z$ gilt, dass für $\mathcal{H}[z, \cdot]$ die dritte Madelungsche Regel gilt.

4.1.15 Lemma. Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \mathbb{R} \times \text{Map}([0, T], \mathbb{R}))$ ein Hysterese-Operator mit Anfangszustand in \mathbb{R} , der die Halbgruppeneigenschaft hat. Wenn für \mathcal{H} die zweite Madelungsche Regel gilt, dann gilt auch die dritte.

Beweis. Folgt sofort durch Kombination der Halbgruppeneigenschaft mit der zweiten Madelungschen Regel. \square

4.1.4. Kongruenz-Eigenschaft im Umkehrbereich der Input-Funktion

4.1.16 Bemerkung. In [56, Kap 1.2] wird die folgende Eigenschaft definiert:

Man sagt, dass eine Hysterese *kongruente innere Schleifen* hat, wenn für alle gleichartigen Hin-und-Zurück-Wechsel der Input-Funktionen zwischen zwei Extrema gilt, dass die entsprechenden Schleifen, welche sich im Input-Output Diagramm ergeben, kongruent sind.

Da diese Eigenschaft für den Bereich gefordert wird, in dem die Input-Funktion umkehrt, ergibt sich die Notation “im Umkehrbereich der Input-Funktion“ in den folgenden Definitionen:

4.1.17 Definition. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq \text{Map}[0, T]$ gegeben.

Dann sagt man, dass \mathcal{H} die *Kongruenz-Eigenschaft in Umkehrbereichen der Input-Funktion* hat, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Für alle Funktionen $u, v \in D(\mathcal{H})$, und alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$ gilt:

Wenn die Vorraussetzungen a)–d) in Definition 4.1.3 erfüllt sind, dann gilt für alle $t \in [t_2, t_3]$ und alle $s \in [s_2, s_3]$ mit $u(t) = v(s)$, dass

$$\mathcal{H}[u](t) - \mathcal{H}[u](t_2) = \mathcal{H}[v](s) - \mathcal{H}[v](s_2). \quad (4.1.19)$$

4.1.18 Definition. Es sei eine nichtleere Menge Z und ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit einem Anfangszustand in Z gegeben.

Dann sagt man, dass \mathcal{H} die *Kongruenz-Eigenschaft in Umkehrbereichen der Input-Funktion* hat, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Für alle $z, z' \in Z$ und alle Funktionen $u \in D(\mathcal{H}[z, \cdot])$, und $v \in D(\mathcal{H}[z', \cdot])$, alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$, gilt:

Wenn die Vorraussetzungen a)–d) in Definition 4.1.3 erfüllt sind, dann gilt für alle $t \in [t_2, t_3]$ und alle $s \in [s_2, s_3]$ mit $u(t) = v(s)$, dass

$$\mathcal{H}[z, u](t) - \mathcal{H}[z, u](t_2) = \mathcal{H}[z', v](s) - \mathcal{H}[z', v](s_2). \quad (4.1.20)$$

4.2. Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen und additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen

4.2.1. Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen für Hysterese-Operatoren ohne Anfangszustand

In diesem Abschnitt seien $T > 0$ und ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ gegeben.

Die Verallgemeinerung der Definition einer Formfunktion für Operatoren vom Preisach-Typ in [8, Definition 2.9.1] (vgl. Bemerkung 4.2.6) führt, in Kombination mit einem Notationswechsel, zu:

4. Madelung'sche Regeln, Kongruenz-Eigenschaft, Umkehrbereich-Aktualisierungsfkt.

4.2.1 Definition. Man sagt, dass eine Funktion $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H}* ist, wenn für alle $u \in D(\mathcal{H})$ und alle Zeiten $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$, so dass u auf $[t_1, t_2]$ und auf $[t_2, t_3]$ monoton und stetig ist und $u(t_3) \in \text{conv}(u(t_1), u(t_2))$ ist, gilt, dass

$$\mathcal{H}[u](t_3) = H(\mathcal{H}[u](t_2), u(t_2), u(t_3)). \quad (4.2.1)$$

4.2.2 Lemma. \mathcal{H} erfüllt die erste Madelung'sche Regel in der Form wie sie in Definition 4.1.3 formuliert wird, genau dann, wenn es eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} gibt.

Beweis. Wenn (4.2.1) gilt, dann folgt unmittelbar, dass die erste Madelung'sche Regel gilt. Wenn die erste Madelung'sche Regel gilt, kann man (4.2.1) benutzen um H als Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} zu definieren. \square

4.2.3 Lemma. Es sei $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow Y$ eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} . Es sei eine invertierbare Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$G(s, v, w) = \phi(H(\phi^{-1}(s), v, w)), \quad \forall s, v, w \in \mathbb{R}. \quad (4.2.2)$$

Dann ist G eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von $\phi \circ \mathcal{H}$

Beweis. Anwenden der Definitionen. \square

4.2.4 Lemma. Es sei $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow Y$ eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} . Es sei eine streng monotone Abbildung $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass es $u \in \text{Map}[0, T]$ mit $\psi \circ u \in D(\mathcal{H})$ gibt. Sei $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$G(s, v, w) = H(s, \psi(v), \psi(w)), \quad \forall s, v, w \in \mathbb{R}. \quad (4.2.3)$$

Dann ist G eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{H}[\psi \circ \cdot]$.

Beweis. Anwenden der Definitionen. \square

4.2.2. Additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion für Hysterese-Operatoren ohne Anfangszustand

In diesem Abschnitt seien $T > 0$ und ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ gegeben.

Wieder in Verallgemeinerung von [8, Definition 2.9.1] betrachten wir:

4.2.5 Definition. Es sei eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von \mathcal{H} gegeben. Man sagt, dass h eine *additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H}* ist, wenn $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(y, r, s) := y + h(r, s)$ eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} ist.

4.2. Umkehrbereich-Aktualisierungsfkt., additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfkt.

4.2.6 *Bemerkung.* a) Es sei eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von \mathcal{H} gegeben.

Dann ist h genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $u \in D(\mathcal{H})$ und alle Zeiten $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$, so dass u auf $[t_1, t_2]$ und auf $[t_2, t_3]$ monoton ist, $u(t_3)$ in der Menge $\text{conv}(u(t_1), u(t_2))$ liegt, gilt, dass

$$\mathcal{H}[u](t_3) = \mathcal{H}[u](t_2) + h(u(t_2), u(t_3)). \quad (4.2.4)$$

- b) Die Aussage in a) zeigt, dass die in [8, Definition 2.9.1] für Hysterese-Operatoren vom PREISACH-Typ eingeführte „*shape function*“ gerade die additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion ist.
- c) In [8, Prop. 2.8.1] wird für einen PRANDTL-ISHLINSKII-Operator mit stückweise monotonen Input-Funktionen eine *shape function* g definiert. Man erhält aus der Proposition und der Aussage a), dass $h(x_1, x_2) := g(x_2 - x_1)$ eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion ist.

Es gilt der folgende Zusammenhang:

4.2.7 Lemma. \mathcal{H} hat die Kongruenz-Eigenschaft im Umkehrbereich der Input-Funktion, wie sie in Def. 4.1.17 formuliert wird, genau dann, wenn es eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} gibt.

Beweis. Wenn (4.2.4) gilt, dann folgt, dass \mathcal{H} die Kongruenz-Eigenschaft im Umkehrbereich der Input-Funktion hat.

Andererseits gilt, dass wenn \mathcal{H} die Kongruenz-Eigenschaft im Umkehrbereich der Input-Funktion hat, man (4.2.4) benutzen kann, um h und damit eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} zu definieren. \square

4.2.8 Lemma. Sei eine affine Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Es sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} . Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(r, s) = \phi(h(r, s)), \quad \forall r, s \in \mathbb{R}. \quad (4.2.5)$$

Dann ist g eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von $\phi \circ \mathcal{H}$.

Beweis. Anwenden der Definitionen und nachrechnen. \square

4.2.9 Lemma. Sei eine invertierbare Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Es sei $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} . Sei $g_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_1(s, v, w) = \phi(\phi^{-1}(s) + h(v, w)), \quad \forall s, v, w \in \mathbb{R}. \quad (4.2.6)$$

Dann ist g_1 eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von $\phi \circ \mathcal{H}$.

Beweis. Anwenden der Definitionen und nachrechnen. \square

4.2.10 Lemma. Es sei eine nichtleere Menge B gegeben. Für jedes $b \in B$ sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H}_b : D(\mathcal{H}_b) (\subseteq \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit einer additiven Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion $h_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass $\bigcap_{b \in B} D(\mathcal{H}_b)$ nicht leer ist.

4. Madelung'sche Regeln, Kongruenz-Eigenschaft, Umkehrbereich-Aktualisierungsfkt.

Sei eine lineare Funktion $\phi : \bigtimes_{b \in B} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Sei der Hysterese-Operator $\mathcal{G} : D(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit $D(\mathcal{G}) := \bigcap_{b \in B} D(\mathcal{H}_b)$ definiert durch $\mathcal{G}[u](t) := \phi((\mathcal{H}_b[u](t))_{b \in B})$. Dann ist $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(r, s) = \phi((h_b(r, s))_{b \in B}), \quad \forall r, s \in \mathbb{R}. \quad (4.2.7)$$

eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{G} .

Beweis. Anwenden der Definitionen und nachrechnen. \square

4.2.11 Lemma. Es sei eine streng monotone Abbildung $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass es $u \in \text{Map}[0, T]$ mit $\psi \circ u \in D(\mathcal{H})$ gibt.

Es sei eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} ist. Dann ist $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(r, s) = h(\psi(r), \psi(s)). \quad \forall r, s \in \mathbb{R} \quad (4.2.8)$$

eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{H}[\psi \circ \cdot]$.

Beweis. Anwenden der Definitionen und nachrechnen. \square

4.2.3. Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion für Hysterese-Operatoren mit Anfangszustand

In diesem Abschnitt seien $T > 0$, eine nichtleere Menge Z und ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit Anfangszustand in Z gegeben. Nun kann man die Betrachtungen aus Abschnitt 4.2.1 übertragen.

Es überträgt sich Def. 4.2.1 auf Hysterese-Operatoren mit Anfangszustand, und man erhält:

4.2.12 Definition. Man sagt, dass eine Funktion $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} ist, wenn für alle $z \in Z$ gilt, dass H eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{H}[z, \cdot]$ ist.

Die Lemma 4.2.2 und 4.2.3 übertragen sich direkt, das Lemma 4.2.4 liefert eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{H}[\cdot, \psi \circ \cdot]$.

4.2.13 Lemma. Wenn Z eine Teilmenge von \mathbb{R} ist, und \mathcal{H} die Halbgruppeneigenschaft hat, dann erhält man eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn man für $z_0 \in Z$ und $r, s \in \mathbb{R}$ die lineare Funktion $u_{r,s} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u_{r,s}(0) = r$ und $u_{r,s}(t) = s$ betrachtet, und dann $H(z_0, r, s)$ gleich $\mathcal{H}[z_0, u_{r,s}](t)$ setzt.

4.2.4. Additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion für Hysterese-Operatoren mit Anfangszustand

In diesem Abschnitt seien $T > 0$, eine nichtleere Menge Z und ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit einem Anfangszustand in Z gegeben. Nun kann man die Betrachtungen aus Abschnitt 4.2.2 übertragen.

Entsprechend der Def. 4.2.5 ergibt sich:

4.2. Umkehrbereich-Aktualisierungsfkt., additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfkt.

4.2.14 Definition. Es sei eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von \mathcal{H} gegeben. Man sagt, dass h eine *additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H}* ist, wenn für alle $z \in Z$ gilt, dass h eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{H}[z, \cdot]$ ist.

Die Lemma 4.2.7, 4.2.8, 4.2.9, übertragen sich, dass Lemma 4.2.11 liefert die additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{H}[\cdot, \psi \circ \cdot]$. Das Lemma 4.2.10 geht über in:

4.2.15 Lemma. *Es seien nichtleere Mengen B und Z gegeben. Für jedes $b \in B$ sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H}_b : D(\mathcal{H}_b) (\subseteq Z \times \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit einem Anfangszustand in Z und einer additiven Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion $h_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass $\bigcap_{b \in B} D(\mathcal{H}_b)$ nicht leer ist.*

Sei eine lineare Funktion $\phi : \bigtimes_{b \in B} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Sei der Hysterese-Operator $\mathcal{G} : D(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit $D(\mathcal{G}) := \bigcap_{b \in B} D(\mathcal{H}_b)$ definiert durch $\mathcal{G}[z, u](t) := \phi((\mathcal{H}_b[z, u](t))_{b \in B})$. Dann ist $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(r, s) = \phi((h_b(r, s)_{b \in B})), \quad \forall r, s \in \mathbb{R} \quad (4.2.9)$$

eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{G} .

Beweis. Anwenden der Definitionen und nachrechnen. □

4.2.16 Lemma. *Wenn Z eine Teilmenge von \mathbb{R} ist, und \mathcal{H} die Halbgruppeneigenschaft hat, dann ist eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn man für $z_0 \in Z$ und $r, s \in \mathbb{R}$ für die Funktion $u_{r,s}^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $[0, T/2]$ und auf $[T/2, T]$ linear ist, für die $u_{r,s}^*(0) = s = u_{r,s}^*(T)$ und $u_{r,s}^*(T/2) = t$ ist, gilt, dass*

$$\mathcal{H}[z_0, u_{r,s}](T) = \mathcal{H}[z_0, u_{r,s}](T/2) + h(r, s). \quad (4.2.10)$$

Beweis. Anwenden der Definitionen und nachrechnen. □

5. Das Darstellungsergebnis für Hysteresis-Operatoren mit skalaren, stückweise monotonen Input-Funktionen und skalaren Output-Funktionen

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ gegeben.

In [8] werden Hysteresis-Operatoren untersucht, die skalare, stückweise monotone Input-Funktionen auf skalare Output-Funktionen abbilden.

Hier soll das dort hergeleitete Darstellungsergebnis präsentiert werden.

5.1. Vorbereitung der Formulierung des Darstellungsergebnisses in [8]

Analog zu [8, Def. 2.2.3] sei:

5.1.1 Definition. Es sei S die Menge aller Strings aus reellen Zahlen und $S_{alt.}$ die Menge aller alternierenden Strings aus reellen Zahlen, d.h.

$$S := \{(v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid n \geq 1, \}, \quad (5.1.1)$$

$$S_{alt.} := \{(v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid n \geq 1, (v_{i+1} - v_i)(v_i - v_{i-1}) < 0, \quad \forall 1 \leq i < n\}. \quad (5.1.2)$$

Überträgt man [8, p. 34], und ruft man sich die Definition 1.1.10 von stückweise monotonen Funktionen ins Gedächtnis, dann erhält man mit der zusätzlichen Bedingung der Existenz einer Standard-Monotonie-Zerlegung:

5.1.2 Definition. a) Es sei eine stückweise monotone Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ ist eine *Standard-Monotonie-Zerlegung* (STANDARD MONOTONICITY DECOMPOSITION, kurz S.M.D) $[0, T]$ von u , wenn für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass t_i die maximale Zahl in $]t_{i-1}, T]$ ist, für die u noch monoton auf $[t_{i-1}, t_i]$ ist.

b) Es sei $\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$ die Menge aller stückweise monotonen Funktionen von $[0, T]$ nach \mathbb{R} , für die eine Standard-Monotonie-Zerlegung von $[0, T]$ existiert, d.h.

$$\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T] = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists 0 = t_0 < \dots < t_n = T : \quad \forall i = 1, \dots, n : \\ t_i = \max\{t \in]t_{i-1}, T] \mid u \text{ ist monoton auf } [t_{i-1}, t]\} \}. \quad (5.1.3)$$

5. Das Darstellungsergebnis für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

5.1.3 *Bemerkung.* a) Wenn für eine stückweise monotone Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Standard-Monotonie-Zerlegung existiert, dann ist diese eindeutig.

b) Wenn für eine stückweise monotone Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ keine Standard-Monotonie-Zerlegung existiert, dann gibt $t_a, t_b \in [0, T]$, so dass u auf $[t_a, t_b[$ monoton ist, aber nicht auf $[t_a, t_b]$. Da aber u stückweise monoton ist, gibt es somit ein $t_* \in]t_a, t_b]$, so dass u auf $[t_*, t_a[$ konstant ist, und $(u(t_*) - u(t_a))(u(t_b) - u(t_*)) < 0$ ist.

c) Für jede stückweise monotone Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in]0, T]$ gilt, dass $\lim_{s \nearrow t} u(s) = u(t)$ ist, existiert eine Standard-Monotonie-Zerlegung. Also ist $C_{\text{pm}}[0, T] \subset \text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$.

5.1.4 *Bemerkung.* a) Es sei $\mathcal{W} : C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ein Operator. Kombiniert man [8, Prop. 2.2.9] mit der Diskussion auf [8, S. 37], dann folgt, dass \mathcal{W} genau dann ein Hysterese-Operator im Sinne von Def. 1.2.1 ist, wenn \mathcal{W} ein Hysterese-Operator im Sinne von [8, Def. 2.2.8] ist.

b) Betrachtet man den Beweis von [8, Prop. 2.2.9], dann sieht man dass die dort gemachte Aussage auch gilt, wenn man einen Operator von $\text{Map}_{\text{pm}}[0, T]$ nach $\text{Map}[0, T]$ betrachtet. Da sich die Diskussion auf [8, S. 37] ebenfalls überträgt, gilt die Aussage in a) also auch für jeden Operator $\mathcal{W} : \text{Map}_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$.

5.1.5 Definition. a) Der *Interpolationsoperator* $\pi_{S_{\text{alt.}}} : S_{\text{alt.}} \rightarrow C_{\text{pm}}[0, T]$ bildet $V = (v_0, \dots, v_n) \in S_{\text{alt.}}(X)$ auf die Funktion $\pi_{\text{alt.}}[V] : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ab, so dass für alle $i = 0, \dots, n$ gilt, dass $\pi_{\text{alt.}}(t_i) = v_i$ ist mit $t_i := T \frac{i}{n}$, und für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass $\pi_{\text{alt.}}$ auf $[t_{i-1}, t_i]$ linear ist, d.h.

$$\pi_{\text{alt.}}[V](t) = \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} v_{i-1} + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} v_i \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]. \quad (5.1.4)$$

b) Es sei ein Operator $\mathcal{W} : C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ gegeben. Das von \mathcal{W} auf $S_{\text{alt.}}$ erzeugte Funktional $\text{Gen}_{S_{\text{alt.}}}(\mathcal{W}) : S_{\text{alt.}} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Gen}_{S_{\text{alt.}}}(\mathcal{W})(V) := \mathcal{W}[\pi_{\text{alt.}}[V]](T), \quad \forall V \in S_{\text{alt.}}. \quad (5.1.5)$$

c) Es sei Z eine nichtleere Menge. Es sei ein Operator $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit Anfangszustand in Z gegeben. Das von \mathcal{H} auf $Z \times S_{\text{alt.}}$ generierte Funktional $\text{Gen}_{S_{\text{init, alt.}}}(\mathcal{H}) : Z \times S_{\text{alt.}} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\text{Gen}_{S_{\text{init, alt.}}}(\mathcal{H})(z, V) := \text{Gen}_{S_{\text{alt.}}}(\mathcal{H}[z, \cdot])(V) = \mathcal{H}[z, \pi_{\text{alt.}}[V]](T), \quad \forall (z, V) \in Z \times S_{\text{alt.}}. \quad (5.1.6)$$

5.2. Das Darstellungsergebnis in [8]

5.2.1. Darstellungsergebnisse für Operatoren ohne Anfangszustand

Kombiniert man die in Bemerkung 5.1.4 ausgeführte Äquivalenz der Definitionen von Hysterese-Operatoren auf $C_{\text{pm}}[0, T]$ und $\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$ mit [8, Pro. 2.2.5, (2.18), (2.19)], dann erhält man die folgende Definition, das folgende Lemma und den folgenden Satz:

5.2.1 Definition. Sei ein Funktional $G : S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

- a) Für $u \in \text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$ wird $\mathcal{H}_G^{\text{pm}}[u] : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, indem man fordert, dass für die Standard-Monotonie-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ für u gilt, dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{pm}}[u](t) := G(u(t_0), u(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (5.2.1a)$$

$$\mathcal{H}_G^{\text{pm}}[u](t) := G(u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t)), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \dots, n. \quad (5.2.1b)$$

- b) Der von G auf $\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_G^{\text{pm}} : \text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ist die Abbildung, die $u \in \text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$ auf $\mathcal{H}_G^{\text{pm}}[u]$ wie in a) abbildet.
- c) Der von G auf $C_{\text{pm}}[0, T]$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_G^{\text{cont. pm}} : C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ist die Einschränkung von $\mathcal{H}_G^{\text{pm}}$ auf $C_{\text{pm}}[0, T]$.

Dank des folgenden Lemmas sind die Bezeichnungen in b) und c) der obigen Definition wohldefiniert.

5.2.2 Lemma. Sei ein Funktional $G : S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Dann sind $\mathcal{H}_G^{\text{pm}} : \text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ und $\mathcal{H}_G^{\text{cont. pm}} : C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ wie in Definition 5.2.1 Hysterese-Operatoren.

5.2.3 Theorem. Für jeden Hysterese-Operator $\mathcal{B} : C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ gibt es ein eindeutig definiertes Funktional $G : S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass \mathcal{B} der von G auf $C_{\text{pm}}[0, T]$ generierte Operator $\mathcal{H}_G^{\text{cont. pm}}$ ist.

Dabei ist G das von \mathcal{B} erzeugte Funktional $\text{Gen}_{S_{alt.}}(\mathcal{B})$ aus Definition 5.1.5.

5.2.4 Bemerkung. a) Das Darstellungsergebnis erlaubt es, sich bei Auswertung von Hysterese-Operatoren für stetige, stückweise monotone Funktionen jeweils darauf zu beschränken, die lokalen Extrema der Input-Funktion zu speichern, und nicht das genaue Verhalten der Input-Funktionen zwischen den lokalen Extrema.

- b) Das Darstellungsergebnis erlaubt es, Bedingungen an Hysterese-Operatoren auf $C_{\text{pm}}[0, T]$ als Bedingungen an das Funktional auf $S_{alt.}$ zu formulieren, und diese dann zu überprüfen. Es gibt einige Bedingungen, die einfacher mit der Stringdarstellungen zu behandeln sind, wie z.B. die Invarianz bezüglich einer Löschungsregel. Beispiele sind in [5, 8] zu finden.

5.2.5 Bemerkung. Auch wenn jedes Funktional $G : S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ einen Hysterese-Operator auf $\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$ generiert, kann man, entgegen der Aussage in [8], **nicht** jeden Hysterese-Operator auf $\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$ aus einem derartigen Funktional gewinnen. Das Funktional würde schon durch das Verhalten des Operators auf $C_{\text{pm}}[0, T]$ eindeutig festgelegt, und dank der Definition in Def. 5.2.1 legt das Funktional dann den Operator auch $\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$ eindeutig fest.

Ein Operator auf $\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$, der nicht mit dem Hysterese-Operator auf $\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T]$ übereinstimmt, welcher von dem Funktional auf $S_{alt.}$ generiert wird, das von dem Operator erzeugt wird, kann somit gar nicht entsprechend der Def. 5.2.1 aus einem Funktional erzeugt werden,

Hierzu zwei Beispiele:

5. Das Darstellungsresultat für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

a) Es gilt für den Hysterese-Operator $\mathcal{H} : \text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit

$$\mathcal{H}[u](t) := \begin{cases} 0, & \text{wenn } u \text{ auf } [0, t] \text{ stetig ist,} \\ 1, & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad \forall t \in [0, T], u \in \text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T], \quad (5.2.2)$$

dass $\text{Gen}_{S_{\text{alt.}}} \langle \mathcal{H} \rangle \equiv 0$ ist. Der von diesem Funktional generierte Hysterese-Operator bildet dann jede Funktion in $C_{\text{pm}}[0, T]$ auf die Funktion ab, die konstant gleich 0 ist. Dieser Operator stimmt auf $C_{\text{pm}}[0, T]$ mit \mathcal{H} überein, aber auf $\text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T] \setminus C_{\text{pm}}[0, T]$ nicht.

b) Es gilt für den Hysterese-Operator $\mathcal{G} : \text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit

$$\mathcal{G}[u](t) := \begin{cases} u(t), & \text{wenn } 1 \neq u(\tau), \quad \forall \tau \in [0, t], \\ 1, & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad \forall t \in [0, T], u \in \text{Map}_{\exists \text{ s.m.d.}}[0, T], \quad (5.2.3)$$

dass für $G := \text{Gen}_{S_{\text{alt.}}} \langle \mathcal{H} \rangle$ die Gleichung

$$G(v_0, \dots, v_n) = \begin{cases} v_n, & \text{wenn } 1 \in \text{conv}(v_{i-1}, v_i), \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ 1, & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_{\text{alt.}}$ gilt.

Die Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = \begin{cases} \frac{t}{T}, & \text{wenn } t \in [0, T/2[\\ 2 + \frac{t}{T}, & \text{wenn } t \in [T/2, T] \end{cases} \quad (5.2.5)$$

ist monoton steigend, und $0 = t_0 < t_1 = T$ ist die Standard-Monotonie-Zerlegung von $[0, T]$ für u .

Also gilt für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G^{\text{pm}}[u](t) &= G(u(0), u(t)) = \begin{cases} G(0, \frac{t}{T}), & \text{wenn } t \in [0, T/2[, \\ G(0, 2 + \frac{t}{T}), & \text{wenn } t \in [T/2, T], \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{t}{T}, & \text{wenn } t \in [0, T/2[, \\ 1, & \text{wenn } t \in [T/2, T]. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Da andererseits $u(\tau) \neq 1$ für alle $\tau \in [0, 1]$ ist, ist $\mathcal{G}[u] = u$. Also gilt für alle $t \in [T/2, T]$, dass $\mathcal{G}[u](t) \neq \mathcal{H}_G^{\text{pm}}[u](t)$ ist.

Um Operatoren und ihr Wirken auf Input-Funktionen wie den obigen zu beschreiben, muss man das im Satz 20.2.4 vorgestellte Darstellungsresultat verwenden.

5.2.2. Darstellungsergebnisse für Operatoren mit Anfangszustand

Im Unterschied zu [8] soll für Hysterese-Operatoren mit Anfangszustand ein explizites Darstellungsergebnis formuliert werden.

Kombiniert man Def. 5.2.1 und Lemma 5.2.2, dann kann man definieren:

5.2.6 Definition. Sei eine nichtleere Menge Z und ein Funktional $G : Z \times S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

- a) Der von G auf $Z \times \text{Map}_{\exists s.m.d.}[0, T]$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_G^{\text{init}, \text{pm}} : Z \times \text{Map}_{\exists s.m.d.}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit Anfangszustand in Z ist die Abbildung, die $(z, u) \in Z \times \text{Map}_{\exists s.m.d.}[0, T]$ auf $\mathcal{H}_{G(z, \cdot)}^{\text{pm}}[u]$ abbildet.
- b) Der von G auf $Z \times C_{\text{pm}}[0, T]$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_G^{\text{init}, \text{cont. pm}} : Z \times C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit Anfangszustand in Z ist die Einschränkung von $\mathcal{H}_G^{\text{init}, \text{pm}}$ auf $Z \times C_{\text{pm}}[0, T]$.

Dann gilt:

5.2.7 Bemerkung. Seien Z und G wie in Def. 5.2.6 gegeben.

- a) Für $z_0 \in Z$ und $u \in \text{Map}_{\exists s.m.d.}[0, T]$ ergibt sich für die Standard-Monotonie-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ für u , dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{init}, \text{pm}}[z_0, u](t) := G\left(z_0, (u(t_0), u(t))\right), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (5.2.7a)$$

$$\mathcal{H}_G^{\text{init}, \text{pm}}[z_0, u](t) := G\left(z_0, (u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t))\right), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \dots, n. \quad (5.2.7b)$$

- b) Für $z_0 \in Z$ gilt

$$\mathcal{H}_G^{\text{init}, \text{pm}}[z_0, \cdot] = \mathcal{H}_{G(z_0, \cdot)}^{\text{pm}}, \quad \mathcal{H}_G^{\text{init}, \text{cont. pm}}[z_0, \cdot] = \mathcal{H}_{G(z_0, \cdot)}^{\text{cont. pm}}. \quad (5.2.8)$$

5.2.8 Theorem. Für jede nichtleere Menge Z gilt:

Für jeden Hysterese-Operator $\mathcal{B} : Z \times C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit Anfangszustand in Z gibt es ein eindeutig definiertes Funktional $G : Z \times S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass \mathcal{B} der von G auf $Z \times C_{\text{pm}}[0, T]$ generierte Operator $\mathcal{H}_G^{\text{init}, \text{cont. pm}}$ ist.

Dabei ist G das von \mathcal{B} erzeugte Funktional $\text{Gen}_{S_{\text{init}, \text{alt.}}}(\mathcal{B})$ aus Definition 5.1.5.

Beweis. Das Theorem 5.2.3 wird für jedes $z \in Z$ angewendet. □

5.3. Anwendung des Darstellungsergebnisses

5.3.1. Untersuchung der Halbgruppeneigenschaft eines Operators mit Hilfe des Funktionals

Die folgende Definition ist inspiriert von [8, Rem. 2.4.3]:

5. Das Darstellungsergebnis für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

5.3.1 Definition. Es sei Z eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} . Es sei $G : Z \times S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Man sagt, dass G die *Halbgruppen-Eigenschaft* hat, wenn für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt:

a) Für alle $v_0, v_2 \in \mathbb{R}$ und alle $v_1 \in \text{conv}(v_0, v_1)$ gilt

$$G(z, (v_0, v_2)) = G(G(z, (v_0, v_1)), (v_1, v_2)). \quad (5.3.1)$$

b) Es gilt für alle (v_0, \dots, v_n) mit $n \geq 2$, dass

$$G(z, (v_0, \dots, v_n)) = G\left(G(z, (v_0, \dots, v_{n-1})), (v_{n-1}, v_n)\right). \quad (5.3.2)$$

5.3.2 Lemma. Es sei Z eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} . Für jeden Hysterese-Operator $\mathcal{G} : \mathbb{R} \times C_{pm}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit Anfangszustand in Z gilt:

Der Operator hat die Halbgruppeneigenschaft genau dann, wenn das von dem Operator definierte Funktional $\text{Gen}_{S_{init, alt.}}(\mathcal{G}) : Z \times S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ die Halbgruppeneigenschaft hat.

Beweis. Folgt durch Anwendung von (5.2.7), da $\mathcal{G} = \mathcal{H}_{\text{Gen}_{S_{init, alt.}}}^{\text{init, pm}}(\mathcal{G})$. □

5.3.2. Madelungzyklus und die Entfernung der Mitte eines solchen

In [5, Sec. 4] und [8, Sec. 2.6] wird die Gültigkeit der zweiten und der dritten Madelungschen Regel in eine Bedingung für das vom Hysterese-Operator auf den alternierenden Strings generierte Funktional überführt.

Dazu dient die folgende Definition [8, Def. 2.6.1], die auch auf [54, S. 51] formuliert wird. Die Äquivalenz der Definitionen folgt, da für $v, v' \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\text{conv}(v, v') = [\min(v, v'), \max(v, v')]$.

5.3.3 Definition. Es sei $(v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $n > 2$ und es sei $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $i + 1 < n$ gegeben.

a) Wenn

$$\text{conv}(v_i, v_{i+1}) \subseteq \text{conv}(v_{i-1}, v_{i+2}), \quad v_i \notin \text{conv}(v_{i-1}, v_{i+1}), \quad v_{i+1} \notin \text{conv}(v_i, v_{i+2}) \quad (5.3.3)$$

dann sagt man, dass (v_i, v_{i+1}) die *Mitte eines Madelungzyklus* in $(v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ bildet.

b) Wenn (v_i, v_{i+1}) die Mitte eines Madelungzyklus in $(v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ bildet, dann sagt man dass $(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+2}, \dots, v_n)$ aus (v_0, \dots, v_n) durch die *Entfernung der Mitte* (v_i, v_{i+1}) eines Madelungzyklus gebildet wird.

c) Für $W \in \mathbb{R}^{n-1}$ sagt man, dass W aus $V := (v_0, \dots, v_n)$ durch die *Entfernung eines Madelungzyklus* gebildet wird, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k + 1 < n$ gibt, so dass $W = (v_0, \dots, v_{k-1}, v_{k+2}, \dots, v_n)$ ist und $(v_0, \dots, v_{k-1}, v_{k+2}, \dots, v_n)$ aus (v_0, \dots, v_n) durch die Entfernung der Mitte (v_k, v_{k+1}) eines Madelungzyklus gebildet wird.

5.3.4 Bemerkung. Für $V \in S_{alt.} \cap \mathbb{R}^{n+1}$ mit $n > 2$, und $W \in \mathbb{R}^{n-1}$, so dass W aus V durch die Entfernung eines Madelungzyklus gebildet wird, folgt, dass $W \in S_{alt.}$.

Die folgende Definition entspricht [8, Def. 2.7.1] und der dort folgenden Diskussion in dem Spezialfall der Madelungschen Ordnung:

- 5.3.5 Definition.** a) Es sei ein Funktional $G : S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Man sagt, dass *das Funktional G die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen vergisst*, wenn für alle $V, W \in S_{alt.}$ so dass W aus V durch die Entfernung der Mitte eines Madelungzyklus gebildet wird, gilt, dass $G(V) = G(W)$ ist.
- b) Es sei $\mathcal{H} : C_{pm}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ein Hysterese-Operator. Dann sagt man, dass *der Operator \mathcal{H} die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen vergisst*, wenn das von \mathcal{H} generierte Funktional $\text{Gen}_{S_{alt.}}(\mathcal{H}) : S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen vergisst.

Dann gilt

5.3.6 Lemma. *Es sei $\mathcal{H} : C_{pm}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ein Hysterese-Operator. Dann vergisst der Operator \mathcal{H} die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen genau dann, wenn für den Operator im Sinne der Def. 4.1.13 die zweite und die dritte Madelungsche Regel gelten.*

Übertragung auf die Operatoren mit Anfangszustand liefert:

5.3.7 Definition. Es sei Z eine nichtleere Menge.

- a) Es sei ein Funktional $G : Z \times S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Man sagt, dass *das Funktional G die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen vergisst*, wenn für alle $z \in Z$ gilt, dass $G(z, \cdot)$ die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen vergisst.
- b) Es sei $\mathcal{H} : Z \times C_{pm}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ein Hysterese-Operator. Dann sagt man, dass *der Operator \mathcal{H} die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen vergisst*, wenn das von \mathcal{H} generierte Funktional $\text{Gen}_{S_{init, alt.}}(\mathcal{H}) : Z \times S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen vergisst.

Dann gilt

5.3.8 Lemma. *Es sei $\mathcal{H} : Z \times C_{pm}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ein Hysterese-Operator. Dann vergisst der Operator \mathcal{H} die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen genau dann, wenn für den Operator die zweite und die dritte Madelungsche Regel gelten.*

5.3.3. Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen und additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen

Benutzt man die Darstellungsergebnisse, dann ergibt sich.

5.3.9 Lemma. *Sei $\mathcal{H} : C_{pm}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ein Hysterese-Operator. Es sei $G = \text{Gen}_{S_{alt.}}(\mathcal{H}) : S_{alt.} \rightarrow \mathbb{R}$ das von ihm generierte Funktional.*

5. Das Darstellungsergebnis für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen

- a) Dann ist eine Funktion $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_{\text{alt}}$ mit $n \geq 3$ und $v_n \in \text{conv}(v_{n-2}, v_{n-1})$ gilt:

$$G(v_0, \dots, v_n) = H(G(v_0, \dots, v_{n-1}), v_{n-1}, v_n). \quad (5.3.4)$$

- b) Dann ist eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von \mathcal{H} genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_{\text{alt}}$ mit $n \geq 3$ und $v_n \in \text{conv}(v_{n-2}, v_{n-1})$ gilt:

$$G(v_0, \dots, v_n) = G(v_0, \dots, v_{n-1}) + h(v_{n-1}, v_n). \quad (5.3.5)$$

5.3.10 Lemma. Sei Z eine nichtleere Menge. Sei $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ein Hysterese-Operator mit Anfangszustand in Z . Es sei $G := \text{Gen}_{S_{\text{init, alt.}}}(\mathcal{H}) : Z \times S_{\text{alt.}} \rightarrow \mathbb{R}$ dass von ihm generierte Funktional.

- a) Dann ist eine Funktion $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $z_0 \in Z$ und alle $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_{\text{alt}}$ mit $n \geq 3$ und $v_n \in \text{conv}(v_{n-2}, v_{n-1})$ gilt:

$$G(z_0, (v_0, \dots, v_n)) = H(G(z_0, (v_0, \dots, v_{n-1})), v_{n-1}, v_n). \quad (5.3.6)$$

- b) Dann ist eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von \mathcal{H} genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $z_0 \in Z$ und alle $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_{\text{alt}}$ mit $n \geq 2$ und $v_n \in \text{conv}(v_{n-2}, v_{n-1})$ gilt:

$$G(z_0, (v_0, \dots, v_n)) = G(z_0, (v_0, \dots, v_{n-1})) + h(v_{n-1}, v_n). \quad (5.3.7)$$

5.3.11 Lemma. Sei Z eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} . Sei $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}[0, T]$ ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft.

Es sei $G := \text{Gen}_{S_{\text{init, alt.}}}(\mathcal{H}) : Z \times S_{\text{alt.}} \rightarrow \mathbb{R}$ dass von ihm generierte Funktional.

- a) Dann ist die Funktion $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(\eta_0, v_0, v_1) := G(\eta_0, (v_0, v_1))$ für alle $\eta_0, v_0, v_1 \in \mathbb{R}$ die Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} .

- b) Dann ist eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von \mathcal{H} genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $z_0 \in Z$ und alle $(v_0, v_1, v_2) \in S_{\text{alt}}$ mit $v_2 \in \text{conv}(v_0, v_1)$ gilt:

$$G(z_0, (v_0, v_1, v_2)) = G(z_0, (v_0, v_1)) + h(v_1, v_2). \quad (5.3.8)$$

5.4. Beispiele für von Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen generierten Funktionen auf Strings

5.4.1. Skalarer RELAY-Operator wie im Abschnitt 3.1.1

Für $a < b$ und $\mathcal{R}_{a,b}$ wie in (3.1.1) gilt für $\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{R}_{a,b} \rangle : \mathbb{R} \times S_{\text{alt.}} \rightarrow \mathbb{R}$, dass für alle $\eta_0 \in \{-1, 1\}$ und alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_{\text{alt.}}$ gilt, (vgl. [8, Ex. 2.2.12]):

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{R}_{a,b} \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} +1, & \text{wenn } v_n \geq b, \\ -1, & \text{wenn } v_n \leq a, \\ \eta_0, & \text{wenn } n = 1, a < v_0 < b, a < v_1 < b, \\ +1, & \text{wenn } n = 1, v_0 \geq b, a < v_1, \\ -1, & \text{wenn } n = 1, v_0 \leq a, v_1 < b, \\ \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{R}_{a,b} \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Man kann dies auch schreiben als

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{R}_{a,b} \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} \eta_0, & \text{wenn } v_i \in]a, b[\quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \\ r_{a,b}(v_{i_{\max}}), & \text{mit } i_{\max} := \max\{i \in \{0, \dots, n\} \mid v_i \notin]a, b[\}, \quad \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

mit $r_{a,b}$ wie in (3.1.4).

Es gilt

- Der $\mathcal{R}_{a,b}$ -Operator vergisst die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen.
- Es ist

$$h(r, s) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } r \leq a, s \geq b, \\ -2, & \text{wenn } r \geq b, s \leq a, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.4.3)$$

eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion für $\mathcal{R}_{a,b}$.

5.4.2. Skalarer außenschaltender RELAY-Operator wie in Abschnitt 3.1.2

Für $a \leq b$ und $\eta_0 \in \{-1, 1\}$ gilt für den außenschaltenden RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[\eta_0, \cdot]$ wie in (3.1.5):

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}} \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} +1, & \text{wenn } v_n > b, \\ -1, & \text{wenn } v_n < a, \\ \eta_0, & \text{wenn } n = 1, a \leq v_0 \leq b, a \leq v_1 \leq b, \\ +1, & \text{wenn } n = 1, v_0 > b, a \leq v_1, \\ -1, & \text{wenn } n = 1, v_0 < a, v_1 \leq b, \\ \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}} \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Dies geht über in

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}} \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} \eta_0, & \text{wenn } v_i \in [a, b] \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \\ r_{a,b}(v_{i_{\max}}), & \text{mit } i_{\max} := \max\{i \in \{0, \dots, n\} \mid v_i \notin [a, b]\}, \quad \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

mit $r_{a,b}$ wie in (3.1.4).

Es gilt

- Der $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}$ -Operator vergisst die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen.
- Es ist

$$h(r, s) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } r < a, s > b, \\ -2, & \text{wenn } r > b, s < a, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.4.6)$$

die additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion für $\mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}$.

5.4.3. Skalarer STOP-Operator wie im Abschnitt 3.2.1

Sei $r > 0$.

Die folgende Untersuchung folgt [8, Exa. 2.3.4]). Wie in Bemerkung 3.2.8 erläutert, muss man bei dem dort betrachteten STOP-Operator $u(0) - \sigma_0$ als Anfangswert verwenden, um die Ausgabe von $\mathcal{S}_r[\sigma_0, u(0)]$ zu erhalten.

Es sei $e_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$e_r(v) := \max\{-r, \min\{r, v\}\} = \text{Proj}_{[-r,r]}(v). \quad (5.4.7)$$

Dann gilt

$$e_r(v) = \begin{cases} -r & \text{wenn } v \leq -r, \\ v & \text{wenn } -r \leq v \leq +r, \\ r & \text{wenn } r \leq v. \end{cases} \quad (5.4.8)$$

5.4. Bsp. für von Hysterese-Operat. mit skalaren Input-Fkt. generierten Fkt. auf Strings

Für den STOP-Operator \mathcal{S}_r wie in Def. 3.2.1 gilt für alle $\eta_0 \in \mathbb{R}$:

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{S}_r \rangle (\eta_0, (v_0, v_1)) = e_r (e_r(\eta_0) + v_1 - v_0), \quad \forall v_0, v_1 \in \mathbb{R}, \quad (5.4.9)$$

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{S}_r \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= e_r \left(\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{S}_r \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})) + v_n - v_{n-1} \right), \quad \forall (v_0, \dots, v_n) \in S_{\text{alt.}} \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Für $x \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n)$ ist

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{S}_r \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n, x)) - \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{S}_r \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) = 2e_r \left(\frac{x - v_n}{2} \right). \quad (5.4.11)$$

Also ist $h(r, s) = 2e_r \left(\frac{s-r}{2} \right)$ die additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion für \mathcal{S}_r .

5.4.4. Skalarer PLAY-Operator wie im Abschnitt 3.2.2

Sei $r > 0$.

Die folgende Untersuchung folgt [8, Exa. 2.2.13]), dort wird f_r allerdings mit den Parametern in der Reihenfolge (v, w) definiert.

Es sei $f_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_r(w, v) := \max\{v - r, \min\{v + r, w\}\} = \text{Proj}_{[v-r, v+r]}(w). \quad (5.4.12)$$

Dann gilt

$$f_r(w, v) = \begin{cases} v + r & \text{wenn } v \leq w - r, \\ w & \text{wenn } w - r \leq v \leq w + r, \\ v - r & \text{wenn } w + r \leq v, \end{cases} \quad (5.4.13)$$

und für \mathcal{P}_r wie in (3.2.6) gilt

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{P}_r \rangle (\eta_0, (v_0, v_1)) = f_r(f_r(\eta_0, v_0), v_1), \quad (5.4.14)$$

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{P}_r \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) = f_r(\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{P}_r \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), v_n). \quad (5.4.15)$$

5.4.5. PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren wie im Abschnitt 3.3

Für den in (3.3.3) definierten PRANDTL-ISHLINSKII-Operator vom STOP-Typ gilt:

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{PI}_S \rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \quad (5.4.16)$$

$$= \int_0^\infty \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{S}_r \rangle (\lambda_0(r), (v_0, v_1, \dots, v_n)) d\eta(r). \quad (5.4.17)$$

Für den in (3.3.4) definierten PRANDTL-ISHLINSKII-Operator vom PLAY-Typ gilt:

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{PI}_P \rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \quad (5.4.18)$$

$$= \int_0^\infty \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{P}_r \rangle (\lambda_0(r), (v_0, v_1, \dots, v_n)) d\eta(r). \quad (5.4.19)$$

5.4.6. Generalisierter PRANDTL-ISHLINSKII-Operator wie im Abschnitt 3.4

Für den generalisierten PRANDTL-ISHLINSKII-Operator vom STOP-Typ wie in (3.4.2) gilt:

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{GPI}_S \rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= g_0(v_n) + \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{PI}_S \rangle (\lambda_0, (g(v_0), g(v_1), \dots, g(v_n))). \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Für den generalisierten PRANDTL-ISHLINSKII-Operator vom PLAY-Typ wie in (3.4.3) gilt:

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{GPI}_P \rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= g_0(v_n) + \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{PI}_P \rangle (\lambda_0, (g(v_0), g(v_1), \dots, g(v_n))). \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

5.4.7. PREISACH-Operator mit RELAY-Operatoren wie im Abschnitt 3.5.1

Für den PREISACH-Operator \mathcal{PR} wie in (3.5.2) gilt:

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{PR} \rangle (w_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \int \int_{[0, \infty[\times \mathbb{R}} \theta(r, v) \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{R}_{v-r, v+r} \rangle (w^0(r, v), (v_0, v_1, \dots, v_n)) \, dv \, dr. \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

5.4.8. PLAY-PREISACH-Gedächtnis-Operator wie im Abschnitt 3.5.2

Für den PLAY-PREISACH-Gedächtnis-Operator $\mathcal{P}^{\text{PREISACH}}$ wie in (3.5.5) gilt:

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{P}^{\text{PREISACH}} \rangle : \Lambda \times S(\mathbb{R}) \rightarrow \Lambda, \quad (5.4.23a)$$

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{P}^{\text{PREISACH}} \rangle (\lambda, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \in \Lambda, \quad (5.4.23b)$$

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{P}^{\text{PREISACH}} \rangle (\lambda, (v_0, v_1, \dots, v_n))(r) = \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{P}_r \rangle (\lambda(r), (v_0, v_1, \dots, v_n)). \quad (5.4.23c)$$

5.4.9. Operatoren vom PREISACH-Typ wie im Abschnitt 3.5.4

Für den von Q erzeugten Operator vom PREISACH-Typ wie in Def. 3.5.9 gilt:

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{PR}_Q \rangle : \Lambda \times S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (5.4.24)$$

$$\text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{PR}_Q \rangle (\lambda, (v_0, v_1, \dots, v_n)) = Q \circ \text{Gen}_{S_{\text{init,alt.}}} \langle \mathcal{P}^{\text{PREISACH}} \rangle (\lambda, (v_0, v_1, \dots, v_n)). \quad (5.4.25)$$

Teil III.

Hysteresis-Operatoren mit vektoriellen Input-Funktionen, Strings und die Funktion auf Konvexitätstrippel-freien Strings, die von Hysteresis-Operatoren auf stückweise affinen, vektoriellen Input-Funktionen definiert werden

6. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen

6.1. Vektorielle RELAY-Operatoren

Es sei $T > 0$ gegeben.

6.1.1. Vektorieller außenschaltender RELAY-Operator

Betrachtet man den PREISACH-Operator für \mathbb{R}^2 -Input-Funktionen, wie er in [56, (3.34)–(3.36)] gebildet wird, so wird dort ein gewichtetes Integral gebildet. Dabei wird für alle Einheitsvektoren $e \in \mathbb{R}^2$ das Skalarprodukt der Input-Funktion mit diesem Einheitsvektor gebildet, und die resultierende skalare Funktion als Input für einen skalaren PREISACH-Operator verwendet. Der Vektor e wird dann mit dem Output dieses Operators multipliziert. Die für verschiedenen Einheitsvektoren entstehenden vektorwertigen Funktionen werden dann gewichtet gemittelt, um den Output dieses PREISACH-Operators zu erhalten.

Da in den skalaren PREISACH-Operatoren außenschaltende RELAY-Operatoren verwendet werden, kann man den gesamten Operator auch als gewichtetes Integral über den folgenden RELAY-Operator betrachten:

6.1.1 Definition. Es sei $\theta \in [0, 2\pi[$ gegeben, und es sei dazu der Einheitsvektor

$$e_\theta := (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad (6.1.1)$$

definiert. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ ist dann der *vektorielle außenschaltende RELAY-Operator* $\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{\text{out},2 \text{ dim.}}$ definiert durch

$$\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{\text{out},2 \text{ dim.}} : \{-e_\theta, e_\theta\} \times C([0, T]; \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Map}([0, T], \{-e_\theta, e_\theta\}), \quad (6.1.2a)$$

$$\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{\text{out},2 \text{ dim.}}[\xi, u](t) = \mathcal{R}_{a,b}^{\text{out}}[\xi \bullet e_\theta, u \bullet e_\theta](t)e_\theta. \quad (6.1.2b)$$

6.1.2 Bemerkung. Für $\theta \in [0, 2\pi[$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ folgt unmittelbar, dass $\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{\text{out},2 \text{ dim.}}$ ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft ist.

6.1.2. Vektorieller RELAY-Operator

Die folgende Definition entspricht [70, (IV.5.1)]. Im Unterschied zur Definition in 6.1.1 wird in der Konstruktion als skalarer RELAY-Operator ein „normaler“ und kein außenschaltender RELAY-Operator verwendet.

6. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen

6.1.3 Definition. Für $\theta \in [0, 2\pi[$, e_θ wie in (6.1.1) und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist der BIDIMENSIONAL DELAYED RELAY-Operator, der auch *vektorieller RELAY-Operator* genannt wird, definiert durch

$$\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{2 \dim.} : \{-e_\theta, e_\theta\} \times C([0, T]; \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Map}([0, T], \{-e_\theta, e_\theta\}), \quad (6.1.3a)$$

$$\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{2 \dim.}[\xi, u](t) = \mathcal{R}_{a,b}[\xi \bullet e_\theta, u \bullet e_\theta](t)e_\theta. \quad (6.1.3b)$$

6.1.4 Bemerkung. Für $\theta \in [0, 2\pi[$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ folgt unmittelbar, dass $\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{2 \dim.}$ ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft ist.

6.1.3. Elementarer RELAY-Operator im Umfeld des ROTATING MODELS

Für die Definition des sogenannten ROTATING MODELS wird in [70, (IV.5.10)–(IV.5.11)]. der folgende Hysterese-Operator definiert:

6.1.5 Definition. Sei K eine kompakte, konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^2 .

a) Für $\eta_0 \in \mathbb{R}^2$ und $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^2)$ wird die Funktion $\mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim}[\eta_0, u] : [0, T] \rightarrow \text{Map}([0, T], K)$ definiert durch

$$\mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim}[\eta_0, u](0) = \begin{cases} \text{Proj}_K(u(0)), & \text{wenn } u(0) \notin K, \\ \text{Proj}_K(\eta_0), & \text{wenn } u(0) \in K, \end{cases} \quad (6.1.4a)$$

$$\mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim}[\eta_0, u](t) = \begin{cases} \text{Proj}_K(u(t)), & \text{wenn } u(t) \notin K, \\ \mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim}(0), & \text{wenn } u(t) \in K \text{ und } X_{\partial K, t}(u) = \emptyset, \\ u(\max X_{\partial K, t}(u)), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.1.4b)$$

$$\text{mit } X_{\partial K, t}(u) := \{s \in]0, t] \mid u(s) \in \partial K\} \quad (6.1.4c)$$

für alle $t \in]0, T]$, wobei Proj_K die Projektion auf K wie in Def. 1.1.11 ist.

b) Der RELAY-Operator im Umfeld des ROTATING MODEL ist die Abbildung

$$\mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim} : \mathbb{R}^2 \times C([0, T]; \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Map}([0, T], \mathbb{R}^2)$$

die $(\eta_0, u) \in \mathbb{R}^2 \times C([0, T]; \mathbb{R}^2)$ auf die in a) definierte Funktion $\mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim}[\eta_0, u] \in \text{Map}([0, T], \mathbb{R}^2)$ abbildet.

6.1.6 Bemerkung. Sei K eine kompakte, konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^2 .

a) Dann ist $\mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim}$ ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft.

b) Für $\eta_1 \in \mathbb{R}^N$ ist

$$\mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim}[\eta_1, \cdot] = \mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim}[P_K(\eta_1), u]. \quad (6.1.5)$$

c) Für $\eta_0 \in K$ und $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^2)$ gilt

$$\mathcal{R}_K^{\text{rot}, 2 \dim}[\eta_0, u](t) = \begin{cases} \text{Proj}_K(u(t)), & \text{wenn } u(t) \notin K, \\ \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in K, \quad \forall s \in [0, T], \\ \text{Proj}_K(\max \{s \in]0, t] \mid u(s) \in \partial K\}), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.1.6)$$

6.1.4. Der RVM-BALL-RELAY-Operator

Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N .

Es soll nun ein wichtiger Spezialfall des in [13, 14, 9] beschriebenen Modells betrachtet werden, welches in [9] als „radial vector model“, kurz *RVM*, bezeichnet wird, und hier im Folgenden als *radiales Vektor-Modell* mit der gleichen Abkürzung bezeichnet wird.

Bei diesem Modell wird eine sogenannte *kritische Oberfläche* betrachtet, die ein wohldefiniertes Inneres umschließt, und somit auch ein wohldefiniertes Äußeres hat.

- Wenn sich der Input im Äußeren zur kritischen Oberfläche befindet, ist der Wert des RELAY-Operators gerade der Einheitsvektor, der vom Zentrum des Inneren der kritischen Oberfläche zum aktuellen Wert der Input-Funktion zeigt.
- Wenn die Input-Funktion die kritische Oberfläche von außen erreicht, dann *friert der RELAY-Operator ein*¹, d.h., der Wert des Outputs des RELAY-Operators bleibt gleich, solange sich der Input in Inneren der kritischen Oberfläche befindet.
- Wenn die Input-Funktion die kritische Oberfläche von innen erreicht und das Innere verlässt, springt der RELAY-Operator auf den in a) beschriebenen Wert.

In dem Spezialfall, dass diese kritische Oberfläche der Rand $\partial B_r(\xi) \subseteq \mathbb{R}^N$ einer offenen Kugel $B_r(\xi) \subseteq \mathbb{R}^N$ mit dem Radius $r > 0$ um einen Punkt $\xi \in \mathbb{R}^N$ ist, führt dies zu dem folgenden Operator, der auch in [18, 53, 54] betrachtet wird.

6.1.7 Definition. Es seien $\xi \in \mathbb{R}^N$ und $r > 0$ gegeben.

- Für $\eta_0 \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^N)$ ist $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{RVM-ball}}[\eta_0, u] : [0, T] \rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ definiert durch

$$\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{RVM-ball}}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} \zeta_\xi(u(t)), & \text{wenn } \|u(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r, \\ \eta_0, & \text{wenn } \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r, \quad \forall s \in [0, t], \\ \zeta_\xi\left(u\left(\max\{s \in [0, t] \mid \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r\}\right)\right), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.1.7a)$$

mit

$$\zeta_\xi : \mathbb{R}^N \setminus \{\xi\} \rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}), \quad \zeta_\xi(v) := \frac{v - \xi}{\|v - \xi\|_{\mathbb{R}^N}}. \quad (6.1.8)$$

- Der RVM-BALL-RELAY-Operator

$$\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{RVM-ball}} : \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$$

ist der Operator, der $(\eta_0, u) \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N)$ auf die Funktion $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{RVM-ball}}[\eta_0, u] \in \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$ abbildet.

6.1.8 Bemerkung. • Für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ und alle $r > 0$ gilt, dass der RVM-BALL-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{RVM-ball}}$ ein Hysteresis-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft ist, siehe [54, Prop. 2.2.1, Prop. 2.2.2.].

¹Diese Notation entspricht dem „freezes“ bzw. „refreezes“ in [14, 11, 54].

6. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen

- Betrachtet man die Darstellung in Fig. 6.1 dann gilt:
 - a) Wenn sich $u(t)$ nicht innerhalb des Kreises in der Mitte der Figur befindet, dann ist $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball}}[\eta_0, u] = \zeta_\xi(u(t))$, d. h. der RELAY-Operator ist gleich dem Einheitsvektor, der von der Mitte des Kreises in Richtung $u(t)$ zeigt.
 - b) Wenn $u(t)$ von außen in das Innere des Kreises wechselt, dann behält $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball}}[\eta_0, u]$ den Wert, den es auf dem Rand des Kreises eingenommen hat, d.h. der RVM-BALL-RELAY-Operator *friert ein*.
 - c) Wenn $u(t)$ sich im Inneren des Kreises befindet, dann bleibt $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball}}[\eta_0, u]$ konstant.

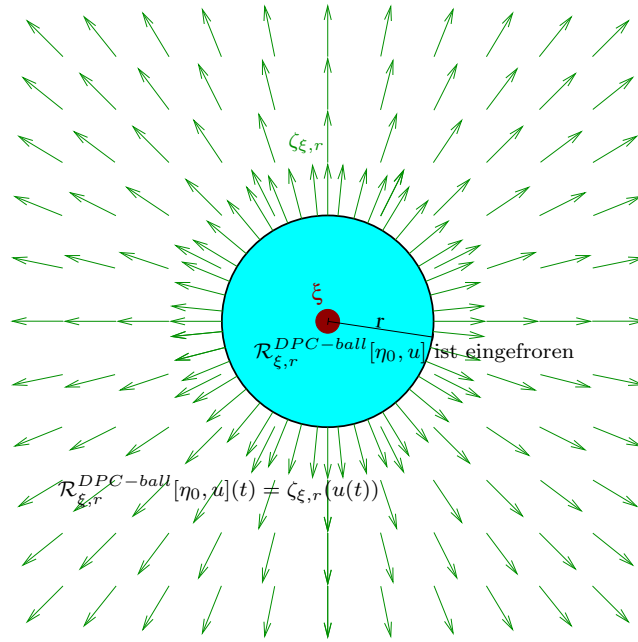


Abbildung 6.1.: Werte des RVM-BALL-RELAY-Operators. (Darstellung ist inspiriert von [54])

6.1.5. Der außenschaltende RVM-BALL-RELAY-Operator

Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N .

Man kann die Beschreibungen des radialen Vektor-Modells in [13, 14, 9] auch so interpretieren, dass, nachdem der RELAY-Operator eingefroren ist, sich der Wert erst dann wieder ändert, wenn der Input nicht nur das Innere zur kritischen Oberfläche, sondern auch die kritische Oberfläche selbst verlassen hat. Analog zu den Betrachtungen im skalaren Fall und denen im vektoriellen Fall in den Abschnitten 6.1.2 und 6.1.1 kann man somit zu einem „normalen“ RELAY-Operator wieder einen außenschaltenden RELAY-Operator definieren.

Betrachtet man den gleichen Spezialfall wie im letzten Abschnitt, dann erhält man:

6.1.9 Definition. , Es seien $\xi \in \mathbb{R}^N$ und $r > 0$ gegeben.

- a) Für $\eta_0 \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{out, RVM-ball}}[\eta_0, u] : [0, T] \rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ definiert durch

(6.1.9a)

$$\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{out, RVM-ball}}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} \zeta_\xi(u(t)), & \text{wenn } \|u(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r, \\ \eta_0, & \text{wenn } \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r, \quad \forall s \in [0, t], \\ \zeta_\xi\left(u\left(\sup\{s \in [0, t] \mid \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\}\right)\right), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.1.9b)$$

mit ζ_ξ wie in (6.1.8).

- b) Der *außenschaltende RVM-BALL-RELAY-Operator*

$$\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{out, RVM-ball}} : \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$$

ist der Operator, der $(\eta_0, u) \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N)$ auf die Funktion $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{out, RVM-ball}}[\eta_0, u] \in \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$ abbildet

6.1.10 Bemerkung. Für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ und alle $r > 0$ gilt:

- a) Der außenschaltende RVM-BALL-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{out, RVM-ball}}$ ist ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft.
- b) Für $\eta_0 \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $u(t) := \xi + \sin(20\pi t/T)\eta_0$ gilt, dass $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{out, RVM-ball}}[\eta_0, u] \equiv \eta_0$ ist, während $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{RVM-ball}}[\eta_0, u]$ zwischen η_0 und $-\eta_0$ hin und her springt.

6.1.6. Der RVM-RELAY-Operator

Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N .

In [14, 12] werden für das radiale Vektor-Modell als kritische Oberfläche neben Kugeloberflächen, wie in Abschnitt. 6.1.4, noch die Oberflächen von Ellipsoiden betrachtet. Wie in [13, 9, 11] ausgeführt wird, können auch allgemeinere abgeschlossene Oberflächen als kritische Oberflächen benutzt werden, sofern diese einfach zusammenhängend sind, und gewissen weiteren Bedingungen genügen.

Dies führt zu der folgenden Definition:

6.1.11 Definition. Es sei eine nichtleere, offene Teilmenge Ω des \mathbb{R}^N gegeben, so dass $\partial\Omega$ einfach zusammenhängend ist. Es sei $\xi \in \Omega$ gegeben.

- a) Für $\eta_0 \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{R}_{\xi, \Omega}^{\text{RVM}}[\eta_0, u] : [0, T] \rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ definiert durch

$$\mathcal{R}_{\xi, \Omega}^{\text{RVM}}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} \zeta_\xi(u(t)), & \text{wenn } u(t) \notin \Omega, \\ \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in \Omega, \quad \forall s \in [0, t], \\ \zeta_\xi\left(u\left(\max\{s \in [0, t] \mid u(s) \notin \Omega\}\right)\right), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.1.10)$$

mit ζ_ξ wie in (6.1.8).

6. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen

b) Der RVM-RELAY-Operator

$$\mathcal{R}_{\xi, \Omega}^{\text{RVM}} : \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$$

ist der Operator, der $(\eta_0, u) \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N)$ auf die Funktion $\mathcal{R}_{\xi, \Omega}^{\text{RVM}}[\eta_0, u] \in \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$ abbildet

6.1.12 Bemerkung. Für alle Ω und ξ wie in Def. 6.1.11, so dass $\mathcal{R}_{\xi, \Omega}^{\text{RVM}}$ wohldefiniert ist, ist dies ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft.

6.1.7. Der außenschaltende RVM-RELAY-Operator

Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N .

Analog zu den Betrachtungen im Kap. 6.1.5 kann man in Def. 6.1.11 wieder zu einen außenschaltenden RELAY-Operator übergehen, und erhält so:

6.1.13 Definition. Es sei eine nichtleere, kompakte Teilmenge K des \mathbb{R}^N gegeben, so dass ∂K einfach zusammenhängend ist. Es sei ξ im Inneren von K gegeben.

a) Für $\eta_0 \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^N)$ ist $\mathcal{R}_{\xi, K}^{\text{out, RVM}}[\eta_0, u] : [0, T] \rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ definiert durch

$$\mathcal{R}_{\xi, K}^{\text{out, RVM}}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} \zeta_{\xi}(u(t)), & \text{wenn } u(t) \notin K, \\ \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in K, \quad \forall s \in [0, t], \\ \zeta_{\xi}\left(u\left(\sup\{s \in [0, t] \mid u(s) \notin K\}\right)\right), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.1.11)$$

mit ζ_{ξ} wie in (6.1.8).

b) Der außenschaltende RVM-RELAY-Operator

$$\mathcal{R}_{\xi, K}^{\text{out, RVM}} : \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$$

ist der Operator, der $(\eta_0, u) \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N)$ auf die Funktion $\mathcal{R}_{\xi, K}^{\text{out, RVM}}[\eta_0, u] \in \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$ abbildet

6.1.14 Bemerkung. Für alle K und ξ wie in Def. 6.1.13, so dass $\mathcal{R}_{\xi, K}^{\text{out, RVM}}$ wohldefiniert ist, ist dies ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft.

6.1.8. Der LÖSCHNER-GREENBERG-RELAY-Operator für konvexe Mengen

Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N .

Durch Kombination von Teilen der Definition der RVM-RELAY-Operatoren (siehe Kap. 6.1.6) aus [14, 13] mit Teilen der Definition des RELAY-Operators im Umfeld des sogenannten ROTATING MODELS (siehe Kap. 6.1.3) in [70, IV.5.10)–(IV.5.11)] wurde in [54, (2.18)] eine Operatordefinition formuliert. Durch Hinzufügen einer Funktion $n_{\partial K}$, die den Wert des RELAY-Operators beim Erreichen der kritischen Fläche, d.h. des Randes der betrachteten konvexen Menge, definiert, ergibt sich der erste RELAY-Operator in der folgenden Definition. Zur diesem wird, wie in den letzten Beispielen, in üblicher Weise noch ein außenschaltender RELAY-Operator definiert.

6.1.15 Definition. Es sei K eine nichtleere, offene und konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^N . Es sei eine Funktion $n_{\partial K} : \partial K \rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ gegeben, so dass

$$\langle n_{\partial K}(k_0), k_0 - z \rangle \geq 0, \quad \forall z \in \overline{K}, k_0 \in \partial K, \quad (6.1.12)$$

mit anderen Worten, es wird verlangt, dass $n_{\partial K}(k_0)$ im Normalenkegel $N_{\overline{K}}(k_0)$ von \overline{K} liegt (siehe [37]).

a) Es sei $e_{\text{Proj}, K} : \mathbb{R}^N \setminus \overline{K} \rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ definiert durch

$$e_{\text{Proj}, K}(v) := \frac{v - \text{Proj}_{\overline{K}}(v)}{\|v - \text{Proj}_{\overline{K}}(v)\|_H}, \quad (6.1.13)$$

wobei $\text{Proj}_{\overline{K}}$ die Projektion auf \overline{K} wie in Def. 1.1.11 ist.

b) Für $\eta_0 \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $u \in C([0, T]; \mathbb{R})^n$ sind $\mathcal{R}_{K, n_{\partial K}}^{\text{LG}}[\eta_0, u]$ und $\mathcal{R}_{K, n_{\partial K}}^{\text{out, LG}}[\eta_0, u]$ als Funktionen von $[0, T]$ nach $\partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ definiert durch

$$\mathcal{R}_{K, n_{\partial K}}^{\text{LG}}[\eta_0, u](t) = \begin{cases} e_{\text{Proj}, K}(u(t)), & \text{wenn } u(t) \notin \overline{K}, \\ n_{\partial K}(u(t)), & \text{wenn } u(t) \in \partial K, \\ \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in K, \quad \forall s \in [0, t], \\ n_{\partial K}\left(u\left(\max\{s \in [0, t] \mid u(s) \notin K\}\right)\right), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.1.14)$$

$$\mathcal{R}_{K, n_{\partial K}}^{\text{out, LG}}[\eta_0, u](t) = \begin{cases} e_{\text{Proj}, K}(u(t)), & \text{wenn } u(t) \notin \overline{K}, \\ \eta_0, & \text{wenn } u(s) \in \overline{K}, \quad \forall s \in [0, t], \\ n_{\partial K}\left(u\left(\sup\{s \in [0, t] \mid u(s) \notin \overline{K}\}\right)\right), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.1.15)$$

c) Der LÖSCHNER-GREENBERG-RELAY-Operator

$$\mathcal{R}_{K, n_{\partial K}}^{\text{LG}} : \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$$

ist der Operator, so dass

$$\partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N) \ni (\eta_0, u) \mapsto \mathcal{R}_{K, n_{\partial K}}^{\text{LG}}[\eta_0, u] \in \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})) \quad \text{aus b).}$$

d) Der außerschaltende LÖSCHNER-GREENBERG-RELAY-Operator

$$\mathcal{R}_{K, n_{\partial K}}^{\text{out, LG}} : \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$$

ist der Operator, so dass

$$\partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N) \ni (\eta_0, u) \mapsto \mathcal{R}_{K, n_{\partial K}}^{\text{out, LG}}[\eta_0, u] \in \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})) \quad \text{aus b).}$$

6.1.16 Bemerkung. a) Es seien K und $n_{\partial K}$ wie in Def. 6.1.15 gegeben, so dass $\mathcal{R}_{\xi, \Omega}^{\text{LG}}$ und $\mathcal{R}_{\xi, \Omega}^{\text{out, LG}}$ wohldefiniert sind. Beides sind wohldefinierte Hysteresee-Operatoren mit der Halbgruppeneigenschaft.

6. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen

- b) Wenn K eine nichtleere, konvexe, offene Menge mit glattem Rand ist, so dass der Normalenvektor auf dem Rand ∂K eindeutig definiert ist, ist dieser als stetige Fortsetzung von $e_{\text{Proj},K}$ auf ∂K die natürliche Wahl für $n_{\partial K}$. Der so definierte Operator wäre dann genau der aus [54, (2.18)], wenn man dort die Funktion $e_{\text{Proj},K}$ auf ∂K durch diese stetige Fortsetzung definieren würde.
- c) Wenn K eine nichtleere, konvexe, offene Menge mit einem Rand ist, für den $e_{\text{Proj},K}$ nicht überall stetig auf ∂K fortgesetzt werden kann, könnte man die Definition in [54, (2.18)] so interpretieren, dass nur bestimmte Input-Funktionen zulässig sind. Und zwar wären dies die Input-Funktionen u , so dass für alle Punkte u_* auf ∂K , in denen keine stetige Fortsetzung von $e_{\text{Proj},K}$ existiert, gilt: Zu allen Zeitpunkten, t , an denen $u(t) = u_*$ ist, muss $\lim_{\tau \nearrow t} e_{\text{Proj},K}(u(\tau))$ wohldefiniert sein. Dann könnte man diesen Grenzwert als Output des RELAY-Operators zur Zeit t definieren, und ihm mit diesem Wert einfrieren, d.h. man würde diesen Wert als Output benutzen, solange der Input in K bzw. in \overline{K} liegt, vgl. auch die Diskussion im nächsten Abschnitt. Hinzu kommen noch weitere Voraussetzungen an die möglichen Input-Funktionen, um die Wohldefiniertheit des Operators sicher zu stellen.

Dies soll hier nicht weiter untersucht werden.

6.1.9. Verallgemeinerung des radialen Vektor-Modells durch Verwendung allgemeinerer Auswertungsfunktionen

Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N .

Die in den Kapiteln 6.1.4–6.1.7 zur Definition der RELAY-Operatoren für das radiale Vektor-Modell verwendete Funktion ζ_ξ ist auf $\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}$ stetig. ξ ist immer so gewählt, dass dieser Punkt nicht auf der kritischen Fläche, d.h. auf $\partial B_r(\xi)$ bzw. auf $\partial\Omega$, liegt. Also ist ζ_ξ auf der kritischen Fläche stetig.

Dies sorgt dafür, dass zu den Zeiten $t > 0$, zu denen der RELAY-Operator einfriert, $\zeta_\xi(u(t))$, und damit der Wert des Outputs des RELAY-Operators zu dieser Zeit, gleich dem Grenzwert des Outputs des RELAY-Operators für $\tau \nearrow t$ ist.

In [9, 11, 12, 13, 14] wird zur Definition der Operatoren eigentlich verlangt, dass dieser Grenzwert gerade der Wert ist, den der RELAY-Operator annimmt, wenn er einfriert. Für die oben betrachtete Funktion ζ_ξ erhält man diesen Grenzwert einfach durch die Auswertung von $\zeta_\xi(u(t))$ auf der kritischen Fläche, und man kann somit diese Funktionsauswertung zur Definition des Operators benutzen.

Man kann allerdings, wie auch in [9, 11, 12, 13] vorgeschlagen, eine andere Funktion γ verwenden, um den Output des RELAY-Operators auf der kritischen Fläche zu definieren. Falls γ nicht stetig auf die kritische Fläche fortsetzbar ist, führt dies dazu, dass die entsprechenden RELAY-Operatoren nur für diejenigen Input-Funktionen definiert werden könnte, bei denen $\lim_{\tau \nearrow t} \gamma \circ u(\tau)$ für die Zeiten t existiert, an denen u von außen auf die kritische Fläche läuft.

Dies soll hier nicht weiter ausgeführt werden.

6.1.10. Verallgemeinerter vektorieller RELAY-Operator

Es sei $T > 0$ gegeben.

Anstelle der im letzten Abschnitt diskutierten Verallgemeinerung der RELAY-Operatoren zum RVM-Modell mit anderen Auswertungsfunktion und einer Grenzwertbildung beim Erreichen der kritischen Fläche, soll der vom Autor in [27] betrachtete verallgemeinerte RELAY-Operator betrachtet werden. Bei diesem wird mit einer Auswertungsfunktion gearbeitet, die von vorne herein auch auf der kritischen Fläche definiert ist, und so den Wert liefert, den der RELAY-Operator beim Einfrieren annimmt. Weiterhin soll noch eine außerschaltende Variante dieses Operators definiert werden:

6.1.17 Definition. Es sei ein topologischer Vektorraum X gegeben. Es sei eine Funktion $\zeta : X \setminus \Omega \rightarrow \Lambda$ gegeben, wobei Ω eine offene, nichtleere Teilmenge von X und Λ eine nichtleere Teilmenge von X ist.

a) Für $\lambda_0 \in \Lambda$ und $u \in C([0, T]; X)$ ist $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}}[\lambda_0, u] : [0, T] \rightarrow \Lambda$ definiert durch

$$\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}}[\lambda_0, u](t) = \begin{cases} \zeta(u(t)), & \text{wenn } u(t) \notin \Omega, \\ \lambda_0, & \text{wenn } u(s) \in \Omega, \quad \forall s \in [0, t], \\ \zeta\left(u\left(\max\{s \in [0, t] \mid u(s) \notin \Omega\}\right)\right), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.1.16)$$

b) Der *verallgemeinerte RELAY-Operator*

$$\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} : \Lambda \times C([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], \Lambda)$$

zur Funktion ζ ist die Abbildung, die $(\lambda_0, u) \in \Lambda \times C([0, T]; X)$ auf die in a) definierte Funktion $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}}[\lambda_0, u] \in \text{Map}([0, T], \Lambda)$ abbildet.

6.1.18 Definition. Es sei ein topologischer Vektorraum X gegeben. Es sei eine Funktion $\beta : X \setminus K_0 \rightarrow \Lambda$ gegeben, wobei K_0 das Innere einer abgeschlossenen, nichtleeren Teilmenge K von X und Λ eine nichtleere Teilmenge von X ist.

a) Für $\lambda_0 \in \Lambda$ und $u \in C([0, T]; X)$ ist $\mathcal{R}_\beta^{\text{out,gen}}[\lambda_0, u] : [0, T] \rightarrow \Lambda$ definiert durch

$$\mathcal{R}_\beta^{\text{out,gen}}[\lambda_0, u](t) = \begin{cases} \beta(u(t)), & \text{wenn } u(t) \notin K, \\ \lambda_0, & \text{wenn } u(s) \in K, \quad \forall s \in [0, t], \\ \beta\left(u\left(\sup\{s \in [0, t] \mid u(s) \notin K\}\right)\right), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.1.17)$$

b) Der *verallgemeinerte außerschaltende RELAY-Operator*

$$\mathcal{R}_\beta^{\text{out,gen}} : \Lambda \times C([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], \Lambda)$$

zur Funktion β ist die Abbildung, die $(\eta_0, u) \in \Lambda \times C([0, T]; X)$ auf die in a) definierte Funktion $\mathcal{R}_{K,\beta}^{\text{out,gen}}[\eta_0, u] \in \text{Map}([0, T], \Lambda)$ abbildet.

6. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen

6.1.19 *Bemerkung.* a) Sind X , Ω und ζ wie in Def. 6.1.17 gegeben, so dass $\mathcal{R}_{\Omega, \zeta}^{\text{gen}}$ wohldefiniert ist, dann folgt, dass dies ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft ist.

b) Sind X , K und β wie in Def. 6.1.18 gegeben, so dass $\mathcal{R}_{K, \beta}^{\text{out, gen}}$ wohldefiniert ist, dann ist dies ein Hysterese-Operator mit der Halbgruppeneigenschaft.

6.1.20 *Bemerkung.* Mit Hilfe der beiden Varianten des verallgemeinerten RELAY-Operators kann man die meisten der in diesem Abschnitt beschriebenen Operatoren wie folgt darstellen.

a) Es sei $\theta \in [0, 2\pi[$ gegeben, und es sei der Einheitsvektor e_θ definiert durch 6.1.1. Es sei $X = \mathbb{R}^2$ und $\Lambda := \{-e_\theta, e_\theta\}$. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Es sei $\zeta : \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \rightarrow \Lambda$ definiert durch

$$\Omega := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v \cdot e_\theta \in]a, b[\}, \quad (6.1.18)$$

$$\zeta(v) := r_{a,b}(v \cdot e_\theta)e_\theta = \begin{cases} e_\theta, & \text{wenn } v \cdot e_\theta \geq b, \\ -e_\theta, & \text{wenn } v \cdot e_\theta \leq a. \end{cases} \quad (6.1.19)$$

- Für den vektoriellen außerschaltenden RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{\text{out, 2 dim.}}$ aus Def. 6.1.1 gilt, dass

$$\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{\text{out, 2 dim.}} = \mathcal{R}_\beta^{\text{out, gen}}, \quad (6.1.20)$$

wobei $\beta : \mathbb{R}^2 \setminus K_0 \rightarrow \Lambda$ definiert ist durch $\beta := \zeta$, $K_0 = \Omega$ und $K = \overline{\Omega}$.

Analog dazu, wie es für $\mathcal{R}_{a,a}^{\text{out}}$ keine Formel wie (3.1.8) gibt, sondern nur (3.1.6), kann man für $\mathcal{R}_{a,a,\theta}^{\text{out, 2 dim.}}$ keine Formel wie die obige herleiten.

- Für den BIDIMENSIONAL DELAYED RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{2 \text{ dim.}}$ aus Def. 6.1.3 gilt, dass

$$\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{2 \text{ dim.}} = \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}}. \quad (6.1.21)$$

b) Sei K eine kompakte, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^2 =: X$. Für den RELAY-Operator $\mathcal{R}_K^{\text{rot, 2 dim}}$ im Umfeld des ROTATING MODEL, der in Def. 6.1.5 definiert wird, gilt nach Bem. 6.1.6

$$\mathcal{R}_K^{\text{rot, 2 dim}}[\eta_0, \cdot] = \mathcal{R}_\beta^{\text{out, gen}}[\text{Proj}_K(\eta_0), \cdot] \quad (6.1.22)$$

für alle $\eta_0 \in K$, wobei $\beta : \mathbb{R}^2 \setminus K_1 \rightarrow K =: \Lambda$ mit $K_1 := K \setminus \partial K$ definiert ist als die Einschränkung von Proj_K .

c) Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N . Es sei $X = \mathbb{R}^N$ mit der durch diese Norm erzeugten Topologie. Es sei $\xi \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Es sei $\zeta_\xi : \mathbb{R}^N \setminus \{\xi\} \rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ definiert wie in (6.1.8). Es sei $\Lambda := \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$.

- Für $r > 0$ gilt für den RVM-BALL-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball}}$ aus Def. 6.1.7, dass

$$\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball}} = \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}}, \quad (6.1.23)$$

wobei $\zeta : \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \rightarrow \Lambda$ mit $\Omega := B_r(\xi)$ die Einschränkung von ζ_ξ ist.

- Für $r > 0$ gilt für den außenschaltenden RVM-BALL-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}}$ aus Def. 6.1.9, dass

$$\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}} = \mathcal{R}_{\beta}^{\text{out,gen}}, \quad (6.1.24)$$

wobei $\beta : \mathbb{R}^N \setminus K_0 \rightarrow \Lambda$ mit $K_0 := B_r(\xi)$ und $K := \overline{B_r(\xi)}$ die Einschränkung von ζ_{ξ} ist.

- d) Es sei eine nichtleere, offene Teilmenge Ω von $X := \mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeben, so dass $\partial\Omega$ einfach zusammenhängend ist und ξ in Ω liegt.

Für den RVM-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{\xi,\Omega}^{\text{RVM}}$, der in Def. 6.1.11 definiert wird, gilt

$$\mathcal{R}_{\xi,\Omega}^{\text{RVM}} = \mathcal{R}_{\zeta}^{\text{gen}}, \quad (6.1.25)$$

wobei $\zeta : \mathbb{R}^N \setminus \Omega \rightarrow \Lambda$ die Einschränkung von ζ_{ξ} ist.

- e) Es sei eine kompakte Teilmenge K von $X := \mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeben, so dass ∂K einfach zusammenhängend ist und ξ in Inneren K_0 von K liegt.

Für den außenschaltenden RVM-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{\xi,K}^{\text{out,RVM}}$, der in Def. 6.1.13 definiert wird, gilt

$$\mathcal{R}_{\xi,K}^{\text{out,RVM}} = \mathcal{R}_{\beta}^{\text{gen}}, \quad (6.1.26)$$

wobei $\beta : \mathbb{R}^N \setminus K_0 \rightarrow \Lambda$ die Einschränkung von ζ_{ξ} ist.

- f) Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Es sei K eine nichtleere, offene und konvexe Teilmenge von $X := \mathbb{R}^N$. Es sei eine Funktion $n_{\partial K} : \partial K \rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ gegeben, so dass (6.1.12) gilt.

Es sei $e_{\text{Proj},K}$ definiert durch (6.1.13) und $\zeta : \mathbb{R}^N \setminus \Omega \rightarrow \Lambda$ mit $\Omega := K$ definiert durch

$$\zeta(v) := \begin{cases} e_{\text{Proj},K}(v), & \text{wenn } v \notin \overline{K}, \\ n_{\partial K}(v), & \text{wenn } v \in \partial K. \end{cases} \quad (6.1.27)$$

- Für den LÖSCHNER-GREENBERG-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{K,n_{\partial K}}^{\text{LG}}$ in der Def. 6.1.15 gilt, dass

$$\mathcal{R}_{K,n_{\partial K}}^{\text{LG}} = \mathcal{R}_{\zeta}^{\text{gen}}. \quad (6.1.28)$$

- Für den außenschaltenden LÖSCHNER-GREENBERG-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{K,n_{\partial K}}^{\text{out,LG}}$ in der Def. 6.1.15 gilt, dass

$$\mathcal{R}_{K,n_{\partial K}}^{\text{out,LG}} = \mathcal{R}_{\zeta}^{\text{out,gen}}. \quad (6.1.29)$$

6.2. Vektorielle STOP- und PLAY-Operatoren und Variationen

6.2.1. STOP- und PLAY-Operatoren mit konvexen charakteristischen Mengen auf Hilbert-Räumen

In diesem Abschnitt sei H ein reeller, separabler Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ und der Norm $\|\cdot\|_H$. Es sei $Z \subseteq H$ eine konvexe, abgeschlossene Menge mit $0_H \in Z$.

6. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen

Dieser Abschnitt folgt [37, 38], allerdings wird, wie im skalaren Fall, nur der STOP-Operator genau wie in diesen Büchern definiert. Beim PLAY-Operator wird die betrachtete Abhängigkeit vom Anfangszustand so angesetzt, dass, wie in [36], der PLAY-Operator die Halbgruppeneigenschaft hat.

6.2.1 Definition. Es sei $CBV([0, T]; H)$ bzw. $CBV([0, T]; Z)$ bzw. die Menge aller stetigen Funktionen von $[0, T]$ nach H bzw Z von beschränkter Variation, d.h.

$$CBV([0, T]; H) := \left\{ u \in C([0, T]; H) \mid \begin{array}{l} \exists C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \\ \forall (t_i)_{i=0}^n \in [0, T]^{n+1} \text{ mit } 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T \text{ gilt:} \\ \sum_{i=1}^n \|u(t_i) - u(t_{i-1})\|_H < C \end{array} \right\}, \quad (6.2.1)$$

$$CBV([0, T]; Z) := C([0, T]; Z) \cap CBV([0, T]; H). \quad (6.2.2)$$

Aus [37, Th. 3.1] bzw. [38, Th. 4.1] ergibt sich

6.2.2 Theorem. Es sei $\psi_0 \in Z$ gegeben. Dann gibt es für jede Funktion $u \in CBV([0, T]; H)$ eindeutig definierte Funktionen $\xi \in CBV([0, T]; H)$ und $\psi \in CBV([0, T]; Z)$, so dass die folgende Variationsungleichung gilt:

$$\psi(t) + \xi(t) = u(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (6.2.3a)$$

$$\psi(0) = \psi_0, \quad (6.2.3b)$$

$$\int_0^T \langle \psi(t) - \phi(t) \, d\xi(t) \rangle_H \geq 0, \quad \forall \phi \in C([0, T]; Z). \quad (6.2.3c)$$

6.2.3 Definition. a) Es seien $\phi_0 \in H$ und $u \in CBV([0, T]; H)$ gegeben. Es seien $\xi \in CBV([0, T]; H)$ und $\psi \in CBV([0, T]; Z)$ die im Thm. 6.2.2 betrachteten Funktionen für $\psi_0 := \text{Proj}_Z(\phi_0)$. Dann ist $\mathcal{S}_Z[\phi_0, u] := \psi \in CBV([0, T]; Z)$.

b) Der STOP-Operator mit der charakteristischen Menge Z ist die Abbildung $\mathcal{S}_Z : H \times C([0, T]; H) \rightarrow CBV([0, T]; Z)$, die $(\phi_0, u) \in H \times C([0, T]; H)$ auf $\mathcal{S}_Z[\phi_0, u] \in CBV([0, T]; Z)$ wie in a) abbildet.

c) Es seien $\xi_0 \in H$ und $u \in CBV([0, T]; H)$ gegeben. Es seien $\xi \in CBV([0, T]; H)$ und $\psi \in CBV([0, T]; Z)$ die im Thm. 6.2.2 betrachteten Funktionen für $\psi_0 := \text{Proj}_Z(u(0) - \xi_0)$. Dann ist $\mathcal{P}_Z[\xi_0, u] := \xi \in CBV([0, T]; H)$.

d) Der PLAY-Operator mit der charakteristischen Menge Z ist die Abbildung $\mathcal{P}_Z : H \times C([0, T]; H) \rightarrow CBV([0, T]; Z)$, die $(\xi_0, u) \in H \times C([0, T]; H)$ auf $\mathcal{P}_Z[\xi_0, u] \in CBV([0, T]; H)$ wie in c) abbildet.

6.2.4 Bemerkung. Wie in [37, 38] ausgeführt, sind der STOP-Operator \mathcal{S}_Z und der PLAY-Operator \mathcal{P}_Z mit der charakteristischen Menge Z Hysterese-Operatoren.

Es gilt, analog zu (3.2.6), Bem. 3.2.5 und [36, (16.25)]:

6.2.5 Lemma. *Es seien $\phi_0 \in H$ und $u \in CBV([0, T]; H)$. Dann gilt*

$$\mathcal{S}_Z[u(0) - \phi_0, u] = u - \mathcal{P}_Z[\phi_0, u], \quad \mathcal{S}_Z[\phi_0, u] = u - \mathcal{P}_Z[u(0) - \phi_0, u], \quad (6.2.4)$$

$$\mathcal{P}_Z[u(0) - \phi_0, u] = u - \mathcal{S}_Z[\phi_0, u], \quad \mathcal{P}_Z[\phi_0, u] = u - \mathcal{S}_Z[u(0) - \phi_0, u], \quad (6.2.5)$$

$$\mathcal{P}_Z[u(0) - \phi_0, u] + \mathcal{S}_Z[\phi_0, u] = u = \mathcal{P}_Z[\phi_0, u] + \mathcal{S}_Z[u(0) - \phi_0, u]. \quad (6.2.6)$$

Beweis. Es seien $\xi \in CBV([0, T]; H)$ und $\psi \in CBV([0, T]; Z)$ die im Thm. 6.2.2 betrachteten Funktionen für $\phi_0 := \text{Proj}_Z(u(0) - \phi_0)$. Dann ist $\mathcal{P}_Z[\phi_0, u] := \xi$ und $\mathcal{S}_Z[\phi_0, u] := \psi$. Mit (6.2.3b) folgen dann die erste Gleichung in (6.2.4), die zweite in (6.2.5) und die erste Gleichung in (6.2.6). Dann gelten diese Gleichungen auch noch, wenn man dort ϕ_0 durch $u(0) - \phi_0$ ersetzt. Dies liefert die verbleibenden Gleichungen sofort. \square

6.2.6 Lemma. *Der STOP-Operator \mathcal{S}_Z mit der charakteristischen Menge Z und der PLAY-Operator \mathcal{P}_Z mit der charakteristischen Menge Z haben die Halbgruppeneigenschaft.*

Beweis. Die Halbgruppeneigenschaft von \mathcal{S}_Z folgt aus [37, 38].

Für $\xi_0 \in H$, $u \in CBV([0, T]; H)$ und $s \in [0, T]$ ist $\mathcal{P}_Z[\xi, u](s) \in H$ und $\mathcal{M}_s[u] \in CBV([0, T]; H)$, und somit liegt $(\mathcal{P}_Z[\xi, u](s), \mathcal{M}_s[u])$ im Definitionsbereich von \mathcal{P}_Z .

Für $t \in [s, T]$ ergibt sich mit (6.2.5) und der Halbgruppeneigenschaft von \mathcal{S}_Z , dass

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_Z[\xi_0, u](t) &= u(t) - \mathcal{S}_Z[u(0) - \xi_0, u](t) = u(t) - \mathcal{S}_Z[\mathcal{S}_Z[u(0) - \xi_0, u](s), \mathcal{M}_s[u]](t - s) \\ &= u(t) - \mathcal{M}_s[u](t - s) + \mathcal{P}_Z[\mathcal{M}_s[u](0) - \mathcal{S}_Z[u(0) - \xi_0, u](s), \mathcal{M}_s[u]](t - s) \\ &= u(t) - u((t - s) + s) + \mathcal{P}_Z[\mathcal{P}_Z[\xi_0, u](s), \mathcal{M}_s[u]](t - s). \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Dies zeigt, dass \mathcal{P}_Z die Halbgruppeneigenschaft hat. \square

Mit [37, The. 1.9] bzw. [38, The. 2.1 und Pro. 4.1] ergibt sich:

6.2.7 Theorem. *Es sei $u \in W^{1,1}(0, T; H)$ gegeben.*

a) *Für $\psi^0 \in Z$ ist $\mathcal{S}_Z[\psi^0, u]$ die eindeutige Lösung $\psi \in W^{1,1}(0, T; H)$ zu*

$$\psi(0) = \psi^0, \quad \left\langle \dot{u}(t) - \dot{\psi}(t), \psi(t) - x \right\rangle_H \geq 0, \quad \text{fast überall auf } (0, T), \quad \forall x \in Z. \quad (6.2.8)$$

b) *Für $\xi_0 \in H$ ist $\mathcal{P}_Z[\xi_0, u]$ die eindeutige Lösung $\xi \in W^{1,1}(0, T; H)$ zu*

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \left\langle \dot{\xi}, u(t) - \xi(t) - x \right\rangle_H \geq 0, \quad \text{fast überall auf } (0, T), \quad \forall x \in Z. \quad (6.2.9)$$

6.2.2. Verallgemeinerter vektorieller PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand

Wie in [65] und im Abschnitt 3.2.4 sei eine Funktion $\gamma : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben, die differenzierbar ist, so dass $|\gamma'(s)| < 1$ für alle $s \in [0, \infty[$ gilt.

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum.

6. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen

Die Verallgemeinerung der Vorzeichenfunktion sign wie in (3.2.12) zu einer Funktion auf X liefert

$$e_X : X \setminus \{0_X\} \rightarrow \{x \in X \mid \|x\|_X = 1\}, \quad (6.2.10a)$$

$$e_X(x) := \frac{1}{\|x\|_X} x, \quad \forall x \in X, x \neq 0_X. \quad (6.2.10b)$$

Für $s_0 \in X$ und eine affine² Funktion $u : [0, T] \rightarrow X$ mit $\|u(0) - s_0\|_X \leq \gamma(|u(0)|)$ liefern dann [65, (15)] und [10], dass für den in [65, (15)] definierten verallgemeinerten vektoriellen PLAY-Operator $\mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}$ gilt, dass

$$\mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[s_0, u](t) = \begin{cases} s_0, & \text{wenn } \|u(t) - s_0\|_X \leq \gamma(|u(t)|), \\ u(t) - e_X(u(t) - s_0) \gamma(|u(t)|), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.2.11)$$

Für s_0 mit $\|u(0) - s_0\|_X > \gamma(|u(0)|)$ wird s_0 durch seine Projektion auf $\{x \in X \mid \|u(0) - x\|_X \leq \gamma(|u(0)|)\}$ ersetzt, was man auch mit Hilfe der obigen Formel ausdrücken kann.

Formuliert man diesen Operator für alle stückweise affinen Funktionen, so muss man dies so gestalten, dass die Ratenunabhängigkeit nicht verletzt wird. Dies führt zu der folgenden Definition:

6.2.8 Definition. a) Es sei M_{pwaf} die Menge aller stückweise affinen Funktionen von $[0, T]$ nach X .

b) Für $\xi_0 \in X$ und $u \in M$ sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ so gewählt, dass t_i das maximale $t \in]t_{i-1}, T]$ ist, so dass die Geschwindigkeit von u im $]t_{i-1}, t[$ keine Richtungsänderung erfährt.

Dann ist $\mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[\xi_0, u][0, T] \rightarrow X$ definiert durch :

- Die Definition des Anfangswertes

$$p_0 := \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[\xi_0, u](0) := \begin{cases} \xi_0, & \text{wenn } \|u(0) - \xi_0\|_X \leq \gamma(|u(0)|), \\ u(0) - e_X(u(0) - \xi_0) \gamma(|u(0)|), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.2.12)$$

- und die Definition für alle $i = 1, \dots, n$

$$\mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[\xi_0, u](t) := \begin{cases} p_{i-1} & \text{wenn } \|u(t) - p_{i-1}\|_X \leq \gamma(|u(t)|), \\ u(t) - e_X(u(t) - p_{i-1}) \gamma(|u(t)|), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (6.2.13)$$

$$\forall t \in]t_i, t_i], \quad (6.2.14)$$

$$p_i := \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[s_0, u](t_i).$$

²Analog zu [70, 62] werden in dieser Arbeit vektorwertige Funktionen v auf $[0, T]$, so dass

$$v((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2) = (1 - \lambda)v(t_1) + \lambda v(t_2)$$

für alle $\lambda \in [0, 1]$ und $t_1, t_2 \in [0, T]$ gilt, nicht als linear sondern als *affin* bezeichnet.

- c) Der verallgemeinerte PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand ist der Operator

$$\mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} : X \times M_{pwaf} \rightarrow \text{Map}([0, T], X),$$

der $(\xi_0, u) \in X \times M_{pwaf}$ auf $\mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \in \text{Map}([0, T], X)$ wie in b) abbildet.

6.2.9 Bemerkung. Der verallgemeinerte PLAY-Operator $\mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}$ ist ein Hysterese-Operator, der **kein** lokales Gedächtnis hat und auch **nicht** die Halbgruppeneigenschaft hat.

6.3. Vektorielle PREISACH-Operatoren

6.3.1. Vektorielle PREISACH-Operatoren auf der Basis von RVM-BALL-RELAY-Operatoren aus Abschnitt 6.1.4

Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N .

Analog zur Herleitung von PREISACH-Operatoren im skalaren Fall, kann man auch über den Output von parametrisierten vektoriellen RELAY-Operatoren gewichtete Integrale bilden, um damit Hysterese-Operatoren zu definieren.

Als Beispiele sollen gewichtete Integrale über die RVM-BALL-RELAY-Operatoren aus Abschnitt 6.1.4 gebildet werden.

Der in Def. 6.1.7 eingeführte RVM-BALL-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{RVM-ball}}$ wird parametrisiert durch das Zentrum $\xi \in \mathbb{R}^N$ und den Radius $r > 0$ der Kugel $B_r(\xi)$, deren Oberfläche die kritische Fläche des RELAY-Operators ist.

In dem man über den Output dieser RELAY-Operatoren ein gewichtetes Integral bildet, kann man den in [18, 53, 54] betrachteten PREISACH-Operator auf der Basis von RVM-BALL-RELAY-Operatoren erhalten.

Die folgende Definition entspricht der in [54, Def. 2.3.1, Lemma 2.3.6]

6.3.1 Definition. Es sei eine Lebesgue-integrierbare *Preisach-Dichte* $\omega : \mathbb{R}^N \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

- a) Die Preisach-Dichte heißt *isotrop*, wenn für alle $r \geq 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_{\mathbb{R}^N} = \|y\|_{\mathbb{R}^N}$ gilt, dass $\omega(x, r) = \omega(y, r)$ ist.
- b) Für eine *Anfangszustandsfunktion* $\eta_0 : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[\rightarrow \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $u \in C([0, T]; \mathbb{R}^N)$ sei $\mathcal{PR}_\omega^{\text{RVM-ball}}[u, \eta_0] : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definiert durch

$$\mathcal{PR}_\omega^{\text{RVM-ball}}[\eta_0, u](t) := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \omega(\xi, r) \mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{RVM-ball}}[\eta_0(\xi, r), u](t) d\xi dr. \quad (6.3.1)$$

- c) Der PREISACH-Operator

$$\mathcal{PR}_\omega^{\text{RVM-ball}} : \text{Map}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^p, \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \mathbb{R}^N)$$

auf der Basis von RVM-BALL-RELAY-Operatoren bildet

$$(\eta_0, u) \in \text{Map}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^p, \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N)$$

auf $\mathcal{PR}_\omega^{\text{RVM-ball}}[\eta_0, u] \in \text{Map}([0, T], \mathbb{R}^N)$ wie in b) ab.

6.3.2. PREISACH-Operatoren mit verallgemeinerten vektoriellen PLAY-Operatoren mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand wie im Abschnitt 6.2.2

Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N .

Ersetzt man in (3.5.9) den verallgemeinerten skalareren PLAY-Operator durch die Norm des verallgemeinerten vektoriellen PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand und multipliziert man den Integranden mit e_X angewendet auf den PLAY-Operator, so erhält man, analog zu [65, (14)], den folgenden Operator:

6.3.2 Definition. Für jedes $r > 0$ sei eine Funktion $\gamma_r : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben, die differenzierbar ist, so dass $|\gamma'_r(s)| < 1$ für alle $s \in [0, \infty[$ gilt. Weiterhin sei $\gamma_0 : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ definiert durch $\gamma_0 \equiv 0$. Es sei $\theta \in L^1([0, \infty[\times \mathbb{R})$ gegeben, und Θ definiert durch (3.5.8), d.h.

$$\Theta(r, s) = \int_{-\infty}^s \theta(r, \sigma) d\sigma - \int_s^{\infty} \theta(r, \sigma) d\sigma. \quad (6.3.2)$$

- a) Für alle $r \geq 0$ sei $\mathcal{P}_{\gamma_r}^{\text{SAVD}}$ der verallgemeinerte PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand, der durch (6.2.11) mit $\gamma := \gamma_r$ definiert wird.
- b) Es sei eine Funktion $w_0 : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^N$ gegeben. Es sei eine stückweise affine Funktion $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ gegeben. Dann ist

$$\mathcal{PR}_{(\gamma_r)_{r \geq 0}}^{\text{gen}}[w^0, u](t) = \int_0^{\infty} \Theta\left(r, \|\mathcal{P}_{\gamma_r}^{\text{SAVD}}[w_0(r), u](t)\|_{\mathbb{R}^N}\right) e_X\left(\mathcal{P}_{\gamma_r}^{\text{SAVD}}[w_0(r), u](t)\right) dr. \quad (6.3.3)$$

6.4. Multi-dimensionale PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren

Es sei ein Hilbert-Raum H gegeben.

Ausgehend von [48, 68] ergibt sich:

6.4.1 Definition. Für alle $r \geq 0$ seien nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmengen Z_r von H gegeben, so dass 0 im Inneren von Z_r liegt.

- a) Es sei

$$\Psi := \{\psi^0 : [0, \infty) \rightarrow H \mid \psi^0(r) \in Z_r \quad \forall r > 0\}. \quad (6.4.1)$$

- b) Sei ein nicht-negatives Maß μ auf $[0, \infty)$ gegeben. Dann ist der vektorielle PRANDTL-ISHLINSKII-Operator definiert durch

$$\mathcal{P}I_{\mu}^{\text{vek.}} : D(\mathcal{P}I_{\mu}^{\text{vek.}}) \rightarrow \text{Map}([0, T], H), \quad (6.4.2a)$$

$$D(\mathcal{P}I_{\mu}^{\text{vek.}}) := \{(\psi^0, u) \in \Psi \times CBV([0, T]; H) \mid \forall t \in [0, T] :$$

$$\begin{aligned} &\text{Die Funktion } \mathbb{R} \ni r \rightarrow \mathcal{S}_{Z_r}[\psi^0(r), u](t) \text{ ist bezüglich } \mu \text{ integrierbar und} \\ &\text{das Integral ist endlich} \}, \end{aligned} \quad (6.4.2b)$$

$$\mathcal{P}I_{\mu}^{\text{vek}}[\psi, u](t) := \int_0^{\infty} \mathcal{S}_{Z_r}[\psi^0(r), u](t) \, d\mu(r), \quad \forall (\psi^0, u) \in D(\mathcal{P}I_{\mu}^{\text{vek.}}). \quad (6.4.2c)$$

7. Strings, Konvexitätsstripel, Konvexitätsstripel-freie Strings

In diesem Abschnitt sollen die Definitionen von Strings und alternierenden Strings aus [8, Def. 2.2.3], siehe auch Def. 5.1.1, auf allgemeinere Mengen übertragen werden, um die Darstellungsergebnisse vorzubereiten.

7.1. Strings für allgemeine Mengen

In diesem Abschnitt sei eine nichtleere Menge Z gegeben.

Als Verallgemeinerung der Definition der Strings in [8, Def. 2.2.3] wird nun verwendet:

7.1.1 Definition. a) Man nennt $V = (v_0, \dots, v_n) \in Z^{n+1}$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ einen *String gebildet mit Elementen aus Z* , und es ist $\text{length}(V) := n + 1$ die *Länge (LENGTH) des Strings V* .

b) Es bezeichnet $S(Z)$ die Menge aller Strings gebildet mit Elementen aus Z .

7.1.2 Definition. Es seien $V = (v_0, \dots, v_n)$ und $W = (w_0, \dots, w_{n+1})$ aus $S(Z)$ gegeben.

a) Man sagt, dass man V aus W durch *Entfernung des führenden Eintrags erhält* oder auch, dass man V aus W durch *Entfernung des Eintrags mit dem Index 0 erhält*, wenn $v_i = w_{i+1}$ für alle $i = 0, \dots, n$ gilt.

b) Sei $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ beliebig. Man sagt, dass man V aus W durch *Entfernung des Eintrags mit dem Index k erhält*, wenn $v_i = w_i$ für alle $i = 0, \dots, k - 1$ und $v_j = w_{j+1}$ für alle $j = k, \dots, n$.

c) Man sagt, dass man V aus W durch *Entfernung des Eintrags mit dem Index n erhält*, oder, dass man V aus W durch *Entfernung des letzten Eintrags erhält*, wenn $v_i = w_i$ für alle $i = 0, \dots, n$.

d) Man sagt, dass man V aus W durch *Entfernung eines Eintrags erhält*, wenn es ein $k \in \{0, \dots, n\}$ gibt, so dass man V aus W durch Entfernung des Eintrags mit dem Index k erhält.

7. Strings, Konvexitätstripel, Konvexitätstripel-freie Strings

7.1.3 Definition. Es seien $V \in Z^{n+1}$ und $W \in Z^{m+1}$ mit $n < m$ gegeben.

- Wenn $n + 1 < m$ ist und es für jedes $k = 1, \dots, m - n - 1$ ein $V_k \in Z^{m+1-k}$ gibt, so dass mit $V_0 := W$ und $V_{n-m} := V$ gilt, dass man für alle $k = 1, \dots, m - n$ V_k aus V_{k-1} durch Entfernung eines Eintrages erhält, dann sagt man, dass man V durch das Entfernen von Einträgen aus W erhält.
- Wenn $n + 1 = m$ ist, und man V aus W durch Entfernung eines Eintrags erhält, sagt man auch, dass man V durch das Entfernen von Einträgen aus W erhält.

7.1.4 Lemma. Es sei eine nichtleere Teilmenge Z_1 von Z gegeben. Es seien V und W in $S(Z)$ gegeben, so dass man V aus W durch das Entfernen von Einträgen erhält. Wenn W in $S(Z_1)$ liegt, dann gilt auch $V \in S(Z_1)$.

Beweis. Wenn W in $S(Z_1)$ liegt, liegen alle Komponenten von W in Z_1 . Da die Komponenten von V eine Auswahl aus diesen Komponenten bilden, folgt, dass alle Komponenten von V in Z_1 liegen und somit $V \in S(Z_1)$ liegt. \square

7.1.5 Definition. Wenn $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum ist, dann ist $|\cdot|_{S(X)} : S(X) \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$|(v_0, \dots, v_n)|_{S(X)} := \max_{0 \leq i \leq n} \|v_i\|_X, \quad \forall (v_0, \dots, v_n) \in S(X). \quad (7.1.1)$$

7.1.6 Lemma. Wenn $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum ist, dann ist für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Einschränkung von $|\cdot|_{S(X)}$ auf X^{n+1} eine Norm.

Beweis. Die betrachtete Einschränkung ist gerade die max-Norm auf dem X^n . \square

Analog zu [8, Rem. 2.4.3] sei

7.1.7 Definition. Die Funktion $\text{concat}_Z : (Z \cup S(Z))^2 \rightarrow S(Z)$ bildet $V = (v_0, \dots, v_n) \in Z^{n+1}$ und $W = (w_0, \dots, w_m) \in Z^{m+1}$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ auf die Verkettung (engl. CONCATENATION) von V und W ab, die definiert ist durch

$$\begin{aligned} \text{concat}_Z(V, W) &= \text{concat}_Z((v_0, \dots, v_n), (w_0, \dots, w_m)) \\ &:= (v_0, \dots, v_n, w_0, \dots, w_m) \in Z^{n+m+2}. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

7.2. Konvexitätstripel

In diesem Abschnitt sei ein Vektorraum X gegeben.

Zur Verallgemeinerung der Resultate aus [5, 8] ist die Beobachtung fundamental, dass ein String $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann ein alternierender String im Sinne von Def. 5.1.1, d.h. im Sinne von [5, 8] ist, wenn sich kein Eintrag v_i mit $1 \leq i < n$ als eine Konvexkombination seines Vorgängers v_{i-1} und seines Nachfolgers v_{i+1} schreiben lässt, d.h. genau dann, wenn (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) kein Konvexitätstripel im Sinne der folgenden Definition ist:

7.2.1 Definition. Es sei $(u, v, w) \in X^3$ gegeben. Wenn $v \in \text{conv}(u, w)$ ist, dann sagt man, dass (u, v, w) ein *Konvexitätstripel* (CONVEXITY TRIPLE) ist.

Zur Vorbereitung der folgenden Betrachtungen sollen Eigenschaften untersucht werden, die sich bei der Kombination von Konvexitätstriplen ergeben.

7.2.2 Bemerkung. Es seien $v_a, v_b, v_c \in X$ gegeben.

- a) Dann ist (v_a, v_b, v_c) genau dann ein Konvexitätstripel, wenn (v_c, v_b, v_a) ein Konvexitätstripel ist.
- b) Wenn (v_a, v_b, v_a) ein Konvexitätstripel ist, dann ist $v_a = v_b$.

7.2.3 Lemma. Es sei $(v_0, v_1, v_2, v_3) \in X^4$ gegeben.

- a) Wenn (v_0, v_1, v_3) und (v_1, v_2, v_3) Konvexitätstriple sind, dann sind auch (v_0, v_2, v_3) und (v_0, v_1, v_2) Konvexitätstriple.
- b) Wenn (v_0, v_1, v_2) und (v_0, v_2, v_3) Konvexitätstriple sind, dann sind auch (v_0, v_1, v_3) und (v_1, v_2, v_3) Konvexitätstriple.
- c) Wenn (v_0, v_1, v_2) und (v_1, v_2, v_3) Konvexitätstriple sind, und $v_1 \neq v_2$ ist, dann sind auch (v_0, v_1, v_3) und (v_0, v_2, v_3) Konvexitätstriple.

Beweis. a) Es seien (v_0, v_1, v_3) und (v_1, v_2, v_3) Konvexitätstriple, d.h. es gilt $v_1 \in \text{conv}(v_0, v_3)$ und $v_2 \in \text{conv}(v_1, v_3)$.

Dann liefert das Lemma 1.1.17 unmittelbar, dass $v_2 \in \text{conv}(v_0, v_3)$. Somit bleibt zu zeigen, dass $v_1 \in \text{conv}(v_0, v_2)$.

Nach Voraussetzung gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, so dass

$$v_1 = (1 - \lambda_1)v_0 + \lambda_1 v_3, \quad v_2 = (1 - \lambda_2)v_1 + \lambda_2 v_3. \quad (7.2.1)$$

- Wenn $\lambda_1 = 0$ ist, dann liefert die erste Gleichung in (7.2.1), dass $v_1 = v_0 \in \text{conv}(v_0, v_2)$.
- Wenn $\lambda_2 = 0$ ist, dann liefert die zweite Gleichung in (7.2.1), dass $v_2 = v_1$. Also ist $v_1 \in \text{conv}(v_0, v_2)$.
- Wenn $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ ist, dann kann man die erste Gleichung in (7.2.1) mit λ_2 multiplizieren, die zweite mit λ_1 , die resultierenden Gleichungen nach $\lambda_1 \lambda_2 v_3$ umformen, und dann gleichsetzen. So folgt

$$\lambda_2 v_1 - (1 - \lambda_1) \lambda_2 v_0 = \lambda_1 v_2 - (1 - \lambda_2) \lambda_1 v_1.$$

Bringt man v_1 auf die linke Seite, dann folgt

$$(\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_1) v_1 = \lambda_1 v_2 + (1 - \lambda_1) \lambda_2 v_0. \quad (7.2.2)$$

Es ist

$$0 < \min(\lambda_1, \lambda_2) \leq \lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_1.$$

7. Strings, Konvexitätstripel, Konvexitätstripel-freie Strings

Also ist

$$\lambda' := \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2\lambda_1}$$

ein wohldefiniertes Element von $[0, 1]$ mit

$$(1 - \lambda') = \frac{(\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2\lambda_1) - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2\lambda_1} = \frac{\lambda_2(1 - \lambda_1)}{\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_2\lambda_1}.$$

Somit liefert (7.2.2), dass

$$v_1 = (1 - \lambda')v_0 + \lambda'v_2 \in \text{conv}(v_0, v_2).$$

b) Es seien (v_0, v_1, v_2) und (v_0, v_2, v_3) Konvexitätstripel. Dann sind nach Bemerkung 7.2.2 auch (v_3, v_2, v_0) und (v_2, v_1, v_0) Konvexitätstripel. Also erhält man mit der Aussage a) für (v_3, v_2, v_1, v_0) , dass (v_3, v_1, v_0) und (v_3, v_2, v_1) Konvexitätstripel ist. Somit sind, nach Bemerkung 7.2.2, auch (v_0, v_1, v_3) und (v_1, v_2, v_3) Konvexitätstripel.

c) Es seien (v_0, v_1, v_2) und (v_1, v_2, v_3) Konvexitätstripel.

Es ist zu zeigen, dass $v_2 \in \text{conv}(v_0, v_3)$. Nach Voraussetzung gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, so dass

$$v_1 = (1 - \lambda_1)v_0 + \lambda_1v_2, \quad v_2 = (1 - \lambda_2)v_1 + \lambda_2v_3, \quad (7.2.3)$$

- Wenn $\lambda_1 = 0$ ist, dann liefert die erste Gleichung in (7.2.3), dass $v_1 = v_0$ ist. Dann liefert die zweite Gleichung, dass $v_2 = (1 - \lambda_2)v_0 + \lambda_2v_3 \in \text{conv}(v_0, v_3)$.
- Wenn $\lambda_2(1 - \lambda_1) = 0$ wäre, dann würden die Gleichungen in (7.2.3) liefern, dass $v_2 = v_1$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Also kann der Fall $\lambda_2(1 - \lambda_1) = 0$ nicht eintreten.
- Wenn $1 > \lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ ist, dann kann man die erste Gleichung in (7.2.3) in die zweite einsetzen und erhält

$$v_2 = (1 - \lambda_2)((1 - \lambda_1)v_0 + \lambda_1v_2) + \lambda_2v_3 = (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_1)v_0 + (\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2)v_2 + \lambda_2v_3.$$

Also ist

$$(1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)v_2 = (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_1)v_0 + \lambda_2v_3. \quad (7.2.4)$$

Es ist

$$1 - \lambda_1 + \lambda_2\lambda_1 = (1 - \lambda_1) + \lambda_2\lambda_1 > \lambda_2(1 - \lambda_1) + \lambda_2\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0.$$

Also ist

$$\lambda' := \frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}$$

ein wohldefiniertes Element von $[0, 1]$, und es gilt

$$1 - \lambda' = \frac{1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2}{1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2} = \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}.$$

Mit (7.2.4) folgt nun, dass $v_2 = (1 - \lambda')v_0 + \lambda'v_3 \in \text{conv}(v_0, v_3)$ ist.

Damit ist gezeigt, dass (v_0, v_2, v_3) ein Konvexitätstripel ist.

Wendet man dieses Resultat jetzt auf (v_3, v_2, v_1, v_0) , dann erhält man mit Hilfe der Bemerkung (7.2.2), dass ebenfalls (v_0, v_1, v_3) ein Konvexitätstripel ist. \square

7.2.4 Lemma. *Es seien $v_a, v_b, v_c \in X$ mit $v_b \neq v_c$ gegeben, so dass (v_a, v_b, v_c) ein Konvexitätstripel ist. Dann ist (v_a, v_c, v_b) kein Konvexitätstripel.*

Beweis. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass (v_a, v_c, v_b) ein Konvexitätstripel ist. Dann ist auch, siehe Bemerkung 7.2.2, (v_b, v_c, v_a) ein Konvexitätstripel. Wendet man jetzt die Aussage c) im Lemma 7.2.3 für (v_a, v_b, v_c, v_a) an, dann folgt, dass (v_a, v_c, v_a) ein Konvexitätstripel ist. Nach Bemerkung 7.2.2 ist somit $v_a = v_c$, und daher $\text{conv}(v_a, v_c) = \{v_c\}$. Da aber $v_b \neq v_c$ ist und ein Element dieser Menge ist, haben wir somit einen Widerspruch. \square

7.2.5 Lemma. *Es sei $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ mit $n \geq 2$ gegeben, so dass für alle $i = 1, \dots, n-1$ (v_0, v_i, v_{i+1}) ein Konvexitätstripel ist. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n-1$, dass (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) und (v_0, v_i, v_n) Konvexitätstripel sind.*

Beweis. Beweis per Induktion:

Ind. Beg. für $n = 2$: Dann ist $n - 1 = 1$, d.h. es ist nur für $i = 1$ etwas zu zeigen. Dass dann $(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) = (v_0, v_1, v_2) = (v_0, v_i, v_n)$ ein Konvexitätstripel ist, ist gerade die Voraussetzung.

Ind. Sch. $2 \leq n \rightarrow n + 1$: Es seien $(v_0, v_1, \dots, v_{n+1}) \in X^{n+2}$ mit $n \geq 2$ gegeben, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ (v_0, v_i, v_{i+1}) ein Konvexitätstripel ist.

Die Induktionsvoraussetzung liefert, dass für alle $i = 1, \dots, n-1$ (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) ein Konvexitätstripel ist.

Da (v_0, v_{n-1}, v_n) und (v_0, v_n, v_{n+1}) Konvexitätstripel sind, liefert die Aussage b) im Lemma 7.2.3 für $(v_0, v_{n-1}, v_n, v_{n+1})$, dass auch (v_{n-1}, v_n, v_{n+1}) ein Konvexitätstripel ist.

Die Induktionsvoraussetzung angewendet auf $(v_0, v_2, \dots, v_{n+1})$ führt dazu, dass für alle $i = 2, \dots, n$ (v_0, v_i, v_{n+1}) ein Konvexitätstripel ist.

Da (v_0, v_2, v_{n+1}) und (v_0, v_1, v_2) Konvexitätstripel sind, erhält man mit der Aussage b) im Lemma 7.2.3 für (v_0, v_1, v_2, v_{n+1}) , dass auch (v_0, v_1, v_{n+1}) ein Konvexitätstripel ist. \square

7.2.6 Lemma. *Es sei $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ mit $n \geq 3$ gegeben, so dass (v_0, v_1, v_n) ein Konvexitätstripel ist, und für alle $i = 2, \dots, n-1$ (v_1, v_i, v_{i+1}) ein Konvexitätstripel ist. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n-1$, dass (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) ein Konvexitätstripel ist.*

Beweis. Beweis per Induktion:

7. Strings, Konvexitätstripel, Konvexitätstripel-freie Strings

Ind. Beg. für $n = 3$: Dass $(v_{2-1}, v_2, v_{2+1}) = (v_1, v_2, v_3)$ ein Konvexitätstripel ist, ist ein Teil der Voraussetzung, und da noch (v_0, v_1, v_3) ein Konvexitätstripel ist, liefert die Aussage a) im Lemma 7.2.3 für (v_0, v_1, v_2, v_3) dass (v_0, v_1, v_2) ein Konvexitätstripel ist.

Ind. Sch. $3 \leq n \rightarrow n + 1$: Es seien $v_0, v_1, \dots, v_{n+1} \in X^{n+2}$ mit $n \geq 2$ gegeben, so dass (v_0, v_1, v_{n+1}) ein Konvexitätstripel ist, und für alle $i = 2, \dots, n$ (v_1, v_i, v_{i+1}) ein Konvexitätstripel ist. Da (v_1, v_n, v_{n+1}) und (v_0, v_1, v_{n+1}) Konvexitätstripel sind, ergibt sich mit der Aussage a) im Lemma 7.2.3 für (v_0, v_1, v_n, v_{n+1}) , dass auch (v_0, v_1, v_n) ein Konvexitätstripel ist. Die Induktionsvoraussetzung liefert, dass für alle $i = 1, \dots, n-1$ (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) ein Konvexitätstripel ist. Da (v_1, v_{n-1}, v_n) und (v_1, v_n, v_{n+1}) Konvexitätstripel sind, führt Anwendung der Aussage b) im Lemma 7.2.3 für $(v_1, v_{n-1}, v_n, v_{n+1})$ zu der Erkenntnis, dass auch (v_{n-1}, v_n, v_{n+1}) ein Konvexitätstripel ist. \square

7.3. Strings mit und ohne Konvexitätstripel

In diesem Abschnitt sei ein Vektorraum X gegeben.

7.3.1 Definition. Es sei $(v_0, \dots, v_n) \in S(X)$ gegeben.

- a) Wenn für ein $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $1 \leq i < n$ gilt, dass (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) ein Konvexitätstripel ist, dann sagt man, dass *beim Index i im String (v_0, \dots, v_n) die Mitte eines Konvexitätstripels liegt*, und dass (v_0, \dots, v_n) *ein String mit Konvexitätstripel ist*.
- b) Wenn (v_0, \dots, v_n) ein String ohne ein Konvexitätstripel ist, also für alle $1 \leq i < n$ beim Index i im String (v_0, \dots, v_n) nicht die Mitte eines Konvexitätstripels liegt, dann ist (v_0, \dots, v_n) *ein String ohne Konvexitätstripel*, oder auch ein *Konvexitätstripel-freier String* (CONVEXITY TRIPLE FREE STRING OF ELEMENTS OF X).

7.3.2 Definition. a) Es sei $S_F(X)$ die Menge aller Konvexitätstripel-freien Strings gebildet mit Elementen aus X , d.h.

$$S_F(X) := \{(v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1 : \\ (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) \text{ ist kein Konvexitätstripel} \}. \quad (7.3.1)$$

- b) Ist X_1 eine konvexe Teilmenge von X , dann ist $S_F(X_1) := S_F(X) \cap S(X_1)$ die Menge aller Konvexitätstripel-freier Strings gebildet mit Elementen aus X_1 .

7.3.3 Bemerkung. a) Es ist

$$S_F(X) = \{(v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1 : \\ v_i \notin \text{conv}(v_{i-1}, v_{i+1})\}. \quad (7.3.2)$$

- b) Ein String $(v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist genau dann ein alternierender String im Sinne der Def. 5.1.1, d.h., im Sinne von [8, Def. 2.2.3], wenn er ein Konvexitätstripel-freier String ist, d.h. es gilt

$$S_F(\mathbb{R}) = S_{alt}. \quad (7.3.3)$$

Es gilt

7.3.4 Lemma. Für alle $V = (v_0, \dots, v_n)$ in $S_F(X_1)$ gilt:

- a) Wenn $V \neq (v_0, v_0)$ ist, dann ist $v_{i-1} \neq v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- b) Für alle $v \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \setminus \{v_n\}$ ist (v_0, \dots, v_n, v) ein Element von $S_F(X_1)$.¹

Beweis. a) Wenn $n > 1$, dann ist für alle $i = 1, \dots, n-1$ (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) kein Konvexitätstripel, und damit $v_{i-1} \neq v_i \neq v_{i+1}$. Wenn $n = 1$ ist, dann ist der Fall $(v_0, v_1) = V = (v_0, v_0)$ ausgeschlossen, und somit $v_0 \neq v_1$.

- b) Da (v_{n-1}, v, v_n) ein Konvexitätstripel und $v \neq v_n$ ist, liefert das Lemma 7.2.4, dass (v_{n-1}, v_n, v) kein Konvexitätstripel ist, und somit (v_0, \dots, v_n, v) in $S_F(X_1)$ liegt. \square

Die Übertragung der MONOTONE DELETION in [8, Def. 2.6.1] oder [54, Def. auf S. 51] führt zu:

7.3.5 Definition. Es seien V und W in $S(X)$ gegeben.

Wenn es eine natürliche Zahl i gibt, die kleiner als die Länge von W ist, so dass beim Index i im String W die Mitte eines Konvexitätstripel liegt, und man V aus W durch die Entfernung des Eintrages mit dem Index i erhält, dann sagt man, dass man V aus W durch Entfernung der Mitte eines Konvexitätstripels erhält.

7.3.6 Bemerkung. Es sei $(v_0, \dots, v_n) \in S(X)$ und es sei i mit $1 \leq i < n$ gegeben, so dass (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) ein Konvexitätstripel bilden. Dann erhält man $(v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_n)$ aus (v_0, \dots, v_n) durch Entfernung der Mitte eines Konvexitätstripels.

7.3.7 Definition. Es seien $V_0 \in X^{n+1}$ und $V_{n-m} \in X^{m+1}$ mit $m < n$ gegeben.

- Wenn $m+1 < n$ ist, und es für jedes $k = 1, \dots, n-m-1$ ein $V_k \in X^{n+1-k}$ gibt, so dass für alle $k = 1, \dots, n-m$ gilt, dass man V_k aus V_{k-1} durch Entfernung der Mitte eines Konvexitätstripels erhält, dann sagt man, dass man V_{n-m} aus V_0 durch die Entfernung von Konvexitätstripelmitten erhält.
- Wenn $m+1 = n$ ist, und man $V_{n-m} = V_1$ aus V_0 durch die Entfernung der Mitte eines Konvexitätstripels erhält, sagt man auch, dass man V_{n-m} aus V_0 durch die Entfernung von Konvexitätstripelmitten erhält.

¹In dem Fall, dass $V = (v_0, v_0)$ ist, liefert dies eine Aussage über die leere Menge.

7. Strings, Konvexitätstripel, Konvexitätstripel-freie Strings

7.3.8 Lemma. *Es sei $V = (v_0, \dots, v_n) \in S(X) \setminus S_F(X)$. Wenn man $w_0 = v_0$, $i := 0$ und $m_0 = 0$ setzt, und dann die folgenden Schritte wiederholt:*

$$i := i + 1, \quad (7.3.4a)$$

$$N_i := \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } m_{i-1} + 1 = n, \\ \{k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, n - 1\} \mid v_k \notin \text{conv}(w_{i-1}, v_{k+1})\}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (7.3.4b)$$

$$m_i := \begin{cases} n, & \text{wenn } N_i = \emptyset, \\ \min N_i, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (7.3.4c)$$

$$w_i = v_{m_i}, \quad (7.3.4d)$$

bis $m_i = n$ ist, und dann $i_* := i$ und $W_V := (w_0, \dots, w_{i_*})$ definiert, so folgt:

- a) *Es gilt für alle $j \in \{1, \dots, i_* - 1\}$, so dass $m_{j-1} + 1 \neq m_j$ ist:*
 - *Es ist $m_{j-1} + 1 < m_j$.*
 - *Es gilt für alle $k \in \{m_{j-1} + 1, \dots, m_j - 1\}$, dass (v_{k-1}, v_k, v_{k+1}) und (w_{j-1}, v_k, w_j) Konvexitätstripel sind.*
- b) *Es gilt für alle $j \in \{1, \dots, i_* - 1\}$, dass $(v_{m_{j-1}}, v_{m_j}, v_{m_{j+1}})$ genau dann ein Konvexitätstripel ist, wenn $v_{m_{j-1}} = v_{m_j}$ ist.*
- c) *Es ist W_V ein Konvexitätstripel-freier String, gebildet mit Elementen aus X , d.h. es gilt $W_V \in S_F(X)$.*
- d) *Man erhält W_V durch Entfernung von Konvexitätstripelmitten aus V .*
- e) *Wenn $V \neq V_0 := (v_0, \dots, v_0) \in X^{n+1}$ ist, dann gilt für alle $j = 1, \dots, i_*$, dass $w_{i-1} \neq w_i$ ist.*

Beweis. a) Es sei $j \in \{1, \dots, i_* - 1\}$, so dass $m_{j-1} + 1 \neq m_j$ ist, beliebig. Da die obige Konstruktion sicherstellt, dass $m_j + 1 \leq m_{j+1}$ ist, folgt, dass $m_j + 1 < m_{j+1}$ ist.

Die obige Konstruktion liefert, dass für alle $k \in \{m_{j-1} + 1, \dots, m_j - 1\}$ gilt, dass $v_k \in \text{conv}(w_{j-1}, v_{k+1})$ ist, und somit $(w_{j-1}, v_k, v_{k+1}) = (v_{m_{j-1}}, v_k, v_{k+1})$ ein Konvexitätstripel ist. Somit kann man das Lemma 7.2.5 für $(v_{m_{j-1}}, v_{m_{j-1}+1}, \dots, v_{m_j})$ anwenden und es folgt für $k = m_{j-1} + 1, \dots, m_j - 1$, dass (v_{k-1}, v_k, v_{k+1}) und $(v_{m_{j-1}}, v_k, v_{m_j}) = (w_{j-1}, v_k, v_j)$ Konvexitätstripel sind.

- b) Es sei $j \in \{1, \dots, i_* - 1\}$ beliebig.

Wenn $v_{m_{j-1}} = v_{m_j}$ ist, dann folgt sofort, dass $(v_{m_{j-1}}, v_{m_j}, v_{m_{j+1}})$ ein Konvexitätstripel ist.

Um die Gegenrichtung zu zeigen, setzen wir voraus, dass $(v_{m_{j-1}}, v_{m_j}, v_{m_{j+1}})$ ein Konvexitätstripel ist. Um $v_{m_{j-1}} = v_{m_j}$ mit einem Beweis durch Widerspruch zu zeigen, nehmen wir an, dass $v_{m_{j-1}} \neq v_{m_j}$ ist.

Wenn $m_j - 1 = m_{j-1}$ wäre, dann würde folgen, dass

$$(w_{m_{j-1}}, v_{m_j}, v_{m_{j+1}}) = (v_{m_{j-1}}, v_{m_j}, v_{m_{j+1}})$$

wäre, und damit ein Konvexitätstrippel wäre, was der obigen Konstruktion widerspricht. Also ist $m_j - 1 \neq m_{j-1}$, und nach a) ist somit $m_{j-1} + 1 < m_j$. Dies kann, nach der obigen Konstruktion nur gelten, wenn $(w_{j-1}, v_{m_{j-1}}, v_{m_j})$ ein Konvexitätstrippel ist.

Nun kann man die Aussage c) im Lemma 7.2.3 für $(w_{j-1}, v_{m_{j-1}}, v_{m_j}, v_{m_{j+1}})$ anwenden, und es folgt, dass $(w_{m_{j-1}}, v_{m_j}, v_{m_{j+1}})$ ein Konvexitätstrippel ist, was der obigen Konstruktion widerspricht. Also führt die Annahme, dass $v_{m_{j-1}} \neq v_{m_j}$ ist, zu einem Widerspruch.

- c) Um mit einem Beweis durch Widerspruch zu zeigen, dass W_V ein Konvexitätstrippel-freier String ist, nehmen wir an, dass diese Aussage falsch ist.

Dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, i_* - 1\}$, so dass $(w_{j-1}, w_j, w_{j+1}) = (w_{j-1}, w_j, v_{m_{j+1}})$ ein Konvexitätstrippel ist. Die obige Konstruktion liefert, dass $(w_{j-1}, w_j, v_{m_{j+1}}) = (w_{j-1}, v_{m_j}, v_{m_{j+1}})$ kein Konvexitätstrippel ist.

Also muss $v_{m_{j+1}} \neq w_{j+1} = v_{m_{j+1}}$ sein, d.h. es ist $m_j + 1 \neq m_{j+1}$. Nach a) ist somit $m_j + 1 < m_{j+1}$. Dies kann, nach der obigen Konstruktion nur gelten, wenn $(w_j, v_{m_{j+1}}, v_{m_{j+2}}), \dots, (w_j, v_{m_{j+1}-1}, v_{m_{j+1}})$ Konvexitätstrippel sind. Da außerdem $(w_{j-1}, w_j, w_{j+1}) = (w_{j-1}, w_j, v_{m_{j+1}})$ ein Konvexitätstrippel ist, können wir das Lemma 7.2.6 für $(w_{j-1}, w_j, v_{m_{j+1}}, \dots, v_{m_{j+1}})$ anwenden. Also ist $(w_{j-1}, w_j, v_{m_{j+1}})$ ein Konvexitätstrippel, was ein Widerspruch dazu ist, dass dieses Trippel kein Konvexitätstrippel ist.

- d) Es sei $m_{i_*+1} := n + 1$. Es wird $j = 0$ gesetzt.

- Für $k = 1, \dots, i_*$ wird wiederholt:

– Wenn $m_{k-1} + 1 < m_k$, dann wiederhole für $l = m_{k-1} + 2, \dots, m_k$:

* Setze $j := j + 1$ und $V_j := (w_0, \dots, w_{k-1}, v_l, \dots, v_n)$.

dann ist $i_* + j = n$. Setzt man $V_{j+1} := V$ und $V_0 = W$, dann gilt für $l := 1, \dots, j$ dass man V_l aus V_{l+1} durch Entfernung der Mitte eines Konvexitätstrippels erhält.

- e) Angenommen, es gibt ein $j \in \{1, \dots, i_*\}$, so dass $w_{j-1} = w_j$ ist. Da aber $W_V = (w_0, \dots, w_{i_*}) \in S_F(X)$ liegt, kann dieser Fall nur eintreten, wenn $i_* = 1$ und $W_V = (w_0, w_0)$ ist. Da dann aber außerdem $W_V = (w_0, w_1) = (v_{m_0}, v_{m_1}) = (v_0, v_n)$ ist, liefert dies, dass $v_0 = v_n$. Da, nach der Aussage in a), für alle $k = 1, \dots, n - 1$ gilt, dass $(w_0, v_k, w_1) = (v_0, v_k, v_0)$ ein Konvexitätstrippel ist, ergibt sich mit Bemerkung 7.2.2, dass $v_k = v_0$ ist.

□

7.3.9 Definition. a) Es ist $\text{redu} : S(X) \rightarrow S_F(X)$ definiert durch

$$\text{redu}(V) := \begin{cases} V, & \text{wenn } V \in S_F(X), \\ W_V & \text{wie im Lemma 7.3.8, sonst.} \end{cases} \quad (7.3.5)$$

- b) Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Dann ist $\text{redu}_{X_1} : S(X_1) \rightarrow S_F(X_1)$ definiert durch

$$\text{redu}_{X_1}(V) := \text{redu}(V), \quad \forall V \in S(X_1). \quad (7.3.6)$$

7. Strings, Konvexitätstripel, Konvexitätstripel-freie Strings

7.3.10 Satz. *Es seien $V \in X^{n+1}$ und $V' \in X^{m+1}$ mit $n > m$ gegeben, so dass man V' aus V durch die Entfernung von Konvexitätstripelmitten erhält. Dann gilt:*

$$\text{redu}(V') = \text{redu}(V). \quad (7.3.7)$$

Beweis. Die Aussage folgt per Induktion, wenn man sie für den Fall $m = n - 1$ beweist, wobei dabei $n \geq 2$ gilt, weil andernfalls V keinen Konvexitätstripel enthalten kann.

Es sei $V = (v_0, \dots, v_n)$ und $V' = (v'_0, \dots, v'_{n-1})$. Da man V' durch Entfernung der Mitte eines Konvexitätstripels aus V erhält, gibt es ein minimales $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$, so dass $(v_{\ell-1}, v_\ell, v_{\ell+1})$ ein Konvexitätstripel ist, $v'_i = v_i$ für $i = 0, \dots, \ell-1$ und $v'_k = v_{k+1}$ für $k = \ell, \dots, n$.

Aus der Minimalität von ℓ folgt, dass $v_{\ell-1} = v_\ell$ nur dann gelten kann, wenn $\ell = 1$ ist.

Da V ein Konvexitätstripel enthält, ist $\text{redu}(V) = W_V$ mit W_V wie im Lemma 7.3.8. Es seien N_i , m_i , w_i und i_* die Werte, die der Algorithmus im Lemma 7.3.8 liefert.

Da $\ell \geq 1$ ist, gibt es genau ein $j \in \{1, \dots, i_*\}$, so dass $m_{j-1} < \ell \leq m_j$ ist. Dann gilt

Behauptung. *Es ist $\ell \neq m_j$.*

Beweis der Behauptung: Wenn $\ell = m_j$ ist, dann ist $(v_{\ell-1}, v_\ell, v_{\ell+1}) = (v_{m_{j-1}}, v_{m_j}, v_{m_{j+1}})$ ein Konvexitätstripel. Somit liefert die Aussage b) in Lemma 7.3.8, dass $v_{\ell-1} = v_{m_{j-1}} = v_{m_j} = v_\ell$ ist. Daraus folgt, wie oben erläutert, dass $\ell = 1$ ist. Wenn aber $\ell = 1 = m_j$ ist, dann muss $j = 1$ und $m_{j-1} = 0$ sein. Da $1 = j < n$ ist, liefert die Konstruktion im Lemma 7.3.8, dass N_1 nicht leer ist. Also ist $m_1 = \min N_1$ und damit $(v_{m_{1-1}}, v_{m_1}, v_{m_{1+1}}) = (v_0, v_1, v_2) = (v_{\ell-1}, v_\ell, v_{\ell+1})$ kein Konvexitätstripel, was ein Widerspruch dazu ist, dass dieses Tripel ein Konvexitätstripel ist. ■

Also gilt, dass $m_{j-1} < \ell < m_j$ ist. Es ist nun zu unterscheiden, ob $V' \in S_F(X)$ liegt, und somit $\text{redu}(V')$ mit V' übereinstimmt, oder andernfalls $\text{redu}(V')$ mit $W_{V'}$ wie im Lemma 7.3.8 übereinstimmt. Dies führt dann in beiden Fällen zu einer Reihe von Fallunterscheidungen.

Behauptung. *Es gilt für $k < n$ und i so, dass $m_{i-1} = k - 1$ ist: Wenn (v_{k-1}, v_k, v_{k+1}) kein Konvexitätstripel ist, dann ist $m_i = k$, $w_i = v_k$ und $i_* > i$.*

Beweis der Behauptung: Da $m_{i-1} = k - 1 < n$ ist, liefert die Konstruktion im Lemma 7.3.8

$$N_i = \{k' \in \{m_{i-1} + 1, \dots, n-1\} \mid v_{k'} \notin \text{conv}(w_{i-1}, v_{k'+1})\}$$

und $m_i = \min N_i$. Da $(v_{m_{i-1}}, v_{m_{i-1}+1}, v_{m_{i-1}+2}) = (v_{k-1}, v_k, v_{k+1})$ ist, liegt $k = m_{i-1} + 1$ in N_i . Da dies aber auch das kleinste mögliche Element von N_i war, folgt, dass $m_i = \min N_i = k$ ist. Dies liefert $w_i = v_{m_i} = v_k$ und dass $i_* > i$ ist. ■

- Wenn $V' \in S_F(X)$ liegt, dann ist $\text{redu}(V') = V'$, und es gilt für alle $i = 1, \dots, n-2$, dass $(v'_{i-1}, v'_i, v'_{i+1})$ kein Konvexitätstripel ist.

Also gilt für alle $i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{\ell-1, \ell, \ell+1\}$, dass (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) kein Konvexitätstripel ist. Wenn $\ell \geq 2$ ist, dann folgt, dass $(v_{\ell-2}, v_{\ell-1}, v_{\ell+1})$ kein Konvexitätstripel ist. Wenn $\ell \leq n-2$ ist, dann folgt, dass $(v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, v_{\ell+2})$ kein Konvexitätstripel ist.

- Wenn $n - 1 = 1$ ist, dann ist $\ell = 1$ und $(w_0, v_{w_0+1}, v_{w_0+2}) = (v_0, v_1, v_2)$ ein Konvexitätstrippel. Also ist $1 = \ell \notin N_1 \subset \{1\}$. Also ist $N_1 = \emptyset$, $m_1 = 2$ und $i_* = 1$.

Also gilt $W_V = \{v_0, v_2\} = V'$.

- Wenn $n \geq 3$ und $\ell = 1$ ist, dann ist $(v_{\ell-1}, v_\ell, v_{\ell+1}) = (v_0, v_1, v_2)$ ein Konvexitätstrippel und $(v_0, v_2, v_3) = (v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, v_{\ell+2})$ kein Konvexitätstrippel. Also liefert die Konstruktion im Lemma 7.3.8, dass $1 \notin N_1$ und $2 \in N_1$. Da $N_1 \subseteq \{1, \dots, n-1\}$, folgt, dass $m_1 = \min N_1 = 2$ ist.

Für $i = 2, \dots, n-2$ ist $i+1 \notin \{0, 1, 2\} = \{\ell-1, \ell, \ell+1\}$ und somit (v_i, v_{i+1}, v_{i+2}) kein Konvexitätstrippel. Dann liefert die obige Behauptung induktiv, dass $m_i = i+1$ und $w_i = v_{i+1}$ ist.

Da $m_{n-2} + 1 = ((n-2) + 1) + 1 = n$ ist, folgt, dass $m_{n-1} = n$ und $w_{n-1} = v_n$ ist.

Also ist $W_V = \{v_0, v_2, \dots, v_n\} = V'$.

- Wenn $n - 1 = \ell > 1$ ist, dann ist (v_{n-2}, v_{n-1}, v_n) ein Konvexitätstrippel, es gilt $v_{n-2} = v_{\ell-1} \neq v_\ell = v_{n-1}$, und es gilt für $i \in \{1, \dots, n-3\}$ dass (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) kein Konvexitätstrippel ist, und ebenso ist $(v_{\ell-2}, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}) = (v_{n-3}, v_{n-2}, v_n)$ kein Konvexitätstrippel.

Für alle $i \in \{1, \dots, n-3\}$ ist (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) kein Konvexitätstrippel. Da $m_0 = 0$ ist, liefert somit die obige Behauptung induktiv für alle $i \in \{1, \dots, n-3\}$, dass $m_i = i$ und $w_i = v_i$ ist.

Wenn $(v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1})$ ein Konvexitätstrippel wäre, dann würde, da (v_{n-2}, v_{n-1}, v_n) ein Konvexitätstrippel ist, und $v_{n-2} \neq v_{n-1}$ ist, mit der Aussage c) in Lemma 7.2.3 für $(v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n)$ folgen, dass auch (v_{n-3}, v_{n-2}, v_n) ein Konvexitätstrippel wäre, was ein Widerspruch wäre.

Da somit $(v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1})$ kein Konvexitätstrippel ist, und $m_{n-3} = n-3$ ist, folgt mit der obigen Behauptung, dass $m_{n-2} = n-2$ ist.

Da (v_{n-2}, v_{n-1}, v_n) ein Konvexitätstrippel ist, folgt, dass $n-1 \notin N_{n-1}$ ist. Da $n-1$ aber das einzige mögliche Element von N_{n-1} war, ist N_{n-1} somit leer, und es gilt $m_{n-1} = n$ und $w_n = v_n$.

Also ist $W_V = (v_0, \dots, v_{n-2}, v_n) = V'$.

- Wenn $n - 1 > \ell > 1$ ist, dann ist $(v_{\ell-1}, v_\ell, v_{\ell+1})$ ein Konvexitätstrippel, es gilt $v_{\ell-1} \neq v_\ell$. Weiterhin gilt für alle $i \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{\ell-1, \ell, \ell+1\}$, dass (v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) kein Konvexitätstrippel ist, und ebenso sind $(v_{\ell-2}, v_{\ell-1}, v_{\ell+1})$ und $(v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, v_{\ell+2})$ keine Konvexitätstrippel.

Mit der gleichen Argumentation wie oben folgt, dass $m_i = i$ und $w_i = v_i$ für alle $i \in \{0, \dots, \ell-2\}$ gilt.

Wenn $(v_{\ell-2}, v_{\ell-1}, v_\ell)$ ein Konvexitätstrippel wäre, dann würde, da $(v_{\ell-1}, v_\ell, v_{\ell+1})$ ein Konvexitätstrippel und $v_{\ell-1} \neq v_\ell$ ist, folgen, dass man die Aussage c) in Lemma 7.2.3 für $(v_{\ell-2}, v_{\ell-1}, v_\ell, v_{\ell+1})$ anwenden könnte, woraus sich ergäbe dass auch $(v_{\ell-2}, v_{\ell-1}, v_{\ell+1})$ ein Konvexitätstrippel wäre, was ein Widerspruch wäre.

7. Strings, Konvexitätstripel, Konvexitätstripel-freie Strings

Da somit $(v_{\ell-2}, v_{\ell-1}, v_{\ell})$ kein Konvexitätstripel ist, und $m_{\ell-2} = \ell - 2$ ist, folgt mit der obigen Behauptung, dass $m_{\ell-1} = \ell - 1$ ist.

Da $(v_{\ell-1}, v_{\ell}, v_{\ell+1})$ ein Konvexitätstripel ist, und $m_{\ell-1} = \ell - 1$ ist, folgt, dass $\ell \notin N_{\ell}$ ist. Da aber $(v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, v_{\ell+2})$ kein Konvexitätstripel ist, und somit $\ell + 1$ in N_{ℓ} liegt, erhält man, dass $m_{\ell} = \ell + 1$ ist.

Mit der gleichen Argumentation wie oben folgt dann, dass für $i = \ell + 1, \dots, n - 1$ gilt, dass $m_i = i + 1$ ist.

Also ist $W_V = (v_0, \dots, v_{\ell-1}, v_{\ell+1}, \dots, v_n) = V'$.

Also gilt $W_V = V'$, wenn $V' \in S_F(X)$.

- Wenn $V' \notin S_F(X)$ ist, dann ist $\text{redu}(V') = W_{V'}$ mit $W_{V'}$ wie im Lemma 7.3.8. Nun wendet man den Algorithmus im Lemma 7.3.8 auf V' an und bezeichnet N_i , m_i , w_i und i_* die sich dabei ergeben jeweils mit N'_i , m'_i , w'_i und i'_* . Dann ist $W_{V'} = (w'_0, \dots, w'_{i'_*})$.

Dann gilt für alle $i = 0, \dots, j - 1$:

$$(v_0, \dots, v_{m_i}) = (v'_0, \dots, v'_{m'_i}) \quad (7.3.8)$$

und somit

$$i'_* > i, \quad m_i = m'_i, \quad w_i = w'_i. \quad (7.3.9)$$

- Wenn $m_{j-1} = n - 2$ ist, dann ist $(v_{m_{j-1}}, v_{m_{j-1}+1}, v_{m_{j-1}+2}) = (v_{\ell-1}, v_{\ell}, v_{\ell+1})$ ein Konvexitätstripel, d.h. es ist

$$n - 1 = m_{j-1} + 1 \notin N_j \subset \{m_{j-1} + 1, \dots, n - 1\} = \{n - 1\},$$

und somit ist $N_j = \emptyset$. Daraus ergibt sich, dass $i_* = j$, $m_j = n$ und $w_j = v_{m_j} = v_n$.

Es ist $m'_{j-1} + 1 = m_{j-1} + 1 = n - 1$. Also ist $N'_j = \emptyset$ und damit $m'_j = n - 1$, $i'_* = j$ und $w'_j = v'_{n-1} = v_n = w_j$.

Somit wurde gezeigt, dass $W_V = W_{V'}$ ist.

- Wenn $m_{j-1} \neq n - 2$ ist, dann ist $m_{j-1} < n - 2$, da aus $m_{j-1} < \ell < m_j$ folgt, dass $m_{j-1} \leq n - 2$ sein muss. Es gilt $m'_{j-1} + 1 = m_{j-1} + 1 < n - 1$. Dann gilt wegen der Konstruktion in Lemma 7.3.8, dass

$$\begin{aligned} N_j &= \{k \in \{m_{j-1} + 1, \dots, n - 2\} \mid v_k \notin \text{conv}(w_{j-1}, v_{k+1})\}, \\ N'_j &= \{k \in \{m_{j-1} + 1, \dots, n - 2\} \mid v'_k \notin \text{conv}(w'_{j-1}, v'_{k+1})\} \\ &= \{k \in \{m_{j-1} + 1, \dots, n - 2\} \mid k < \ell - 2, \quad v_k \notin \text{conv}(w_{j-1}, v_{k+1})\} \\ &\quad \cup \{k \in \{\ell, \dots, n - 2\} \mid k + 1 \notin \text{conv}(w_{j-1}, v_{k+2})\} \\ &\quad \cup \begin{cases} \{\ell - 1\}, & \text{wenn } \ell - 1 \geq m_{j-1} + 1 \quad \text{und} \quad v_{\ell-1} \notin \text{conv}(w_{j-1}, v_{\ell+1}), \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Daraus folgt, da $m_{j-1} < \ell < m_j = \min N_j$

$$\begin{aligned}
 N'_j &= \{k \in \{m_{j-1} + 1, \dots, n - 2\} \mid k < \ell - 2, \quad k \in N_j\} \\
 &\cup \{k \in \{\ell, \dots, n - 2\} \mid k + 1 \in N_j\} \\
 &\cup \begin{cases} \{\ell - 1\}, & \text{wenn } \ell - 1 \geq m_{j-1} + 1 \quad \text{und} \quad v_{\ell-1} \notin \text{conv}(w_{j-1}, v_{\ell+1}), \\ \emptyset, & \text{sonst,} \end{cases} \\
 &= \{k' - 1 \mid k' \in N_j\} \\
 &\cup \begin{cases} \{\ell - 1\}, & \text{wenn } \ell - 1 \geq m_{j-1} + 1 \quad \text{und} \quad v_{\ell-1} \notin \text{conv}(w_{j-1}, v_{\ell+1}), \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

Wenn $\ell - 1 \geq m_{j-1} + 1$ ist, dann ist $\ell \geq m_{j-1} + 2 \geq 2$, d.h. es ist (siehe oben) $v_{\ell-1} \neq v_\ell$. Da $(v_{\ell-1}, v_\ell, v_{\ell+1})$ ein Konvexitätstripel ist, kann die Aussage c) in Lemma 7.2.3 auf $(w_{j-1}, v_{\ell-1}, v_\ell, v_{\ell+1})$ angewendet werden, und es folgt, dass $(w_{j-1}, v_{\ell-1}, v_{\ell+1})$ ein Konvexitätstripel ist, es also nie einen Beitrag vom letzten Term auf der rechten Seite von (7.3.10) ergibt. Somit gilt

$$N'_j = \{k' - 1 \mid k' \in N_j\}. \tag{7.3.11}$$

- * Wenn $N_j = \emptyset$ ist, dann ist somit auch $N'_j = \emptyset$ und damit $j = i_* = i'_*$, $w_j = n$, $w'_j = n - 1$ und $w_j = v_n = v'_{n-1} = w'_j$. Also ist gezeigt, dass $W_V = W_{V'}$ ist.
- * Wenn $N_j \neq \emptyset$ ist, dann ist $m_j = \min N_j$ und aus (7.3.11) folgt, dass $N'_j = \{k' - 1 \mid k' \in N_j\}$ ist. Daraus folgt, dass $m'_j = \min N'_j = m_j - 1$ ist. Dann ist $w'_j = v'_{m'_j} = v_{m'_j+1} = v_{m_j} = w_j$.

Für $i = j + 1, \dots, i_*$ gilt

$$\begin{aligned}
 N'_i &= \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } m'_{i-1} + 1 = n - 1, \\ \{k \in \{m'_{i-1} + 1, \dots, n - 2\} \mid v'_k \notin \text{conv}(w'_{i-1}, v'_{k+1})\}, & \text{sonst,} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } m_{i-1} = n - 1, \\ \{k \in \{m_{i-1}, \dots, n - 2\} \mid v_{k+1} \notin \text{conv}(w_{i-1}, v_{k+2})\}, & \text{sonst,} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } m_{i-1} + 1 = n, \\ \{k - 1 \mid k \in N_i\} & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Also gilt $i'_* = i_*$, und für $i = j + 1, \dots, i_*$ gilt $m'_i = m_i - 1$, $w'_i = v'_{m'_i} = v'_{m_i-1} = v_{m_i} = w_i$.

Somit wurde gezeigt, dass $W_V = W_{V'}$ ist.

□

7. Strings, Konvexitätstripel, Konvexitätstripel-freie Strings

7.3.11 Korollar. *Es sei $V \in S(X)$ gegeben.*

- a) *Wenn $\text{redu}(V) \neq V$ ist, dann erhält man $\text{redu}(V)$ aus V durch die Entfernung von Konvexitätstripelmitten.*
- b) *Es gilt für alle $U \in S(X)$ mit $U \neq \text{redu}(V)$, die man aus V durch die Entfernung von Konvexitätstripelmitten erhält, dass man $\text{redu}(V)$ aus U durch die Entfernung von Konvexitätstripelmitten erhält.*
- c) *Wenn $U \in S_F(X)$ ist, und man U aus V durch die Entfernung von Konvexitätstripelmitten erhält, dann ist $U = \text{redu}(V)$.*

Beweis. Die Aussagen folgt unmittelbar aus der Def. 7.3.9, dem Satz 7.3.10 und dem Lemma 7.3.8 □

7.3.12 Definition. Es sei eine nichtleere Menge Y gegeben.

- a) Es sei eine Abbildung $G : S_F(X) \rightarrow Y$ gegeben. Dann ist die *kanonische Erweiterung* $\text{ext}(G)$ von G auf $S(X)$ die Abbildung $\text{ext}(G) : S(X) \rightarrow Y$, die definiert ist durch:

$$\text{ext}(G) := G \circ \text{redu} . \quad (7.3.12)$$

- b) Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Es sei eine Abbildung $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben. Dann ist die *kanonische Erweiterung* $\text{ext}(G)$ von G auf $S(X_1)$ die Abbildung $\text{ext}(G) : S(X_1) \rightarrow Y$, die definiert ist durch:

$$\text{ext}(G) := G \circ \text{redu}_{X_1} . \quad (7.3.13)$$

7.3.13 Lemma. *Es seien eine nichtleere Menge Y und eine Abbildung $G : S_F(X) \rightarrow Y$ gegeben. Dann gilt für alle $V, W \in S(X)$, so dass man W aus V durch die Entfernung von Konvexitätstripelmitten erhält*

$$\text{ext}(G)(W) = \text{ext}(G)(V) . \quad (7.3.14)$$

Beweis. Der Satz 7.3.10 liefert, dass $\text{redu}(V) = \text{redu}(W)$ ist. Dann liefert die Definition von $\text{ext}(G)$ die gewünschte Gleichheit. □

7.3.14 Lemma. *Es sei eine nichtleere Menge Y gegeben. Es seien X_1 und X_2 nichtleere und konvexe Teilmengen von X mit $X_1 \subset X_2$. Es sei eine Abbildung $G : S_F(X_2) \rightarrow Y$ gegeben. Dann gilt die für Einschränkung $G|_{S_F(X_1)}$ von G auf $S_F(X_1)$: Die kanonische Erweiterung $\text{ext}\left(G|_{S_F(X_1)}\right)$ von $G|_{S_F(X_1)}$ auf $S(X_1)$ ist gerade die Einschränkung auf $S(X_1)$ der kanonische Erweiterung $\text{ext}(G)$ von G auf $S(X_2)$, d.h. es gilt*

$$\text{ext}\left(G|_{S_F(X_1)}\right) = \text{ext}(G)|_{S(X_1)} \quad (7.3.15)$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus den Definitionen. □

7.3.15 Lemma. Wenn $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum ist, dann gilt für alle V und W in $S(X)$, so dass man V aus W durch die Entfernung von Konvexitätstrippelmitten erhält:

$$|V|_\infty = |W|_\infty, \quad |V|_\infty = |\text{redu}(V)|_\infty. \quad (7.3.16)$$

Beweis. Für alle $v_1, v_2, v_3 \in X$, so dass (v_1, v_2, v_3) ein Konvexitätstrippel bildet, ist

$$\|v_2\|_X \leq \max \{ \|v_1\|_X, \|v_3\|_X \}. \quad (7.3.17)$$

Damit folgen die Abschätzungen. □

Analog zum Vergessen der „MONOTONE DELETION“ in [8] wird formuliert:

7.3.16 Definition. Es seien eine nichtleere, konvexe Teilmenge X_1 von X , eine nichtleere Menge Y und eine Abbildung $G : S(X_1) \rightarrow Y$ gegeben.

Man sagt, dass die Abbildung G die Entfernung von Konvexitätstrippeln vergisst, wenn für alle $V, W \in S(X_1)$, so dass man W aus V durch die Entfernung von Konvexitätstrippelmitten erhält, gilt, dass $G(V) = G(W)$ ist.

7.3.17 Korollar. Es seien eine nichtleere, konvexe Teilmenge X_1 von X , eine nichtleere Menge Y und eine Abbildung $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben. Dann vergisst $\text{ext}(G)$ die Entfernung von Konvexitätstrippeln.

Beweis. Folgt mit der Definition unmittelbar aus dem Lemma 7.3.13. □

7.3.18 Korollar. Es seien eine nichtleere, konvexe Teilmenge X_1 von X , eine nichtleere Menge Y und eine Abbildung $G : S(X_1) \rightarrow Y$ gegeben. Dann vergisst G die Entfernung von Konvexitätstrippeln genau dann, wenn G mit der kanonischen Erweiterung der Einschränkung $G|_{S_F(X_1)}$ von G auf $S_F(X_1)$ übereinstimmt.

Beweis. \implies : Wenn G die Entfernung von Konvexitätstrippeln vergisst, dann folgt mit dem Korollar 7.3.11, dass für alle $V \in S(X)$ gilt, dass

$$G(V) = G(\text{redu}_{X_1}(V)) = \text{ext} \left(G|_{S_F(X_1)} \right) (V). \quad (7.3.18)$$

\impliedby : Folgt unmittelbar aus dem Korollar 7.3.17. □

7.4. Madelungzyklus und die Entfernung eines solchen

In diesem Abschnitt sei ein Vektorraum X gegeben.

Um zu untersuchen, ob ein Hysterese-Operator für vektorielle Input-Funktionen eine passende Formulierung der zweiten und dritten Madelungschen Regel erfüllt, wird im Folgenden untersucht werden, ob er die Löschung von Madelung-Zyklen vergisst.

Dazu wird die Definition der so genannten MADELUNG DELETION RULE, siehe [5, Sec. 4], [8, Def. 2.6.1] oder auch Def. 5.3.3 von skalaren Strings auf Strings mit Elementen aus X übertragen:

7. Strings, Konvexitätstripel, Konvexitätstripel-freie Strings

7.4.1 Definition. Es sei $(v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ mit $n > 2$ und es sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k+1 < n$ gegeben.

a) Wenn

$$\text{conv}(v_k, v_{k+1}) \subseteq \text{conv}(v_{k-1}, v_{k+2}), \quad v_k \notin \text{conv}(v_{k-1}, v_{k+1}), \quad v_{k+1} \notin \text{conv}(v_k, v_{k+2}) \quad (7.4.1)$$

dann sagt man, dass (v_k, v_{k+1}) die *Mitte eines Madelungzyklus* in $(v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ ist..

b) Wenn (v_k, v_{k+1}) die Mitte eines Madelungzyklus in $(v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ ist, und $W = (w_0, \dots, w_{n-2}) \in X^{n-1}$ definiert ist durch

$$w_i = v_i, \quad \forall i = 0, \dots, k-1, \quad w_j = v_{j+2}, \quad \forall j = k, \dots, n-2, \quad (7.4.2)$$

dann sagt man, dass W aus (v_0, \dots, v_n) durch die *Entfernung der Mitte* (v_k, v_{k+1}) eines Madelungzyklus gebildet wird.

7.4.2 Bemerkung. Häufig, wie z.B. hier in Def. 5.3.3, schreibt man den Vektor W in der letzten Definition auch als $(v_0, \dots, v_{k-1}, v_{k+2}, \dots, v_n)$, und schließt in dieser Schreibweise auch ein, dass

- für $k = 1$ und $n = 3$ gilt, dass $W = (v_0, v_3)$ ist,
- für $k = 1$ und $n > 3$ gilt, dass $W = (v_0, v_3, \dots, v_n)$ ist,
- für $k = n - 2$ und $n > 3$ gilt, dass $W = (v_0, \dots, v_{n-3}, v_n)$ ist.

7.4.3 Definition. Für $W \in X^{n-1}$ und $V := (v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ mit $n > 2$ sagt man, dass W aus V durch die *Entfernung eines Madelungzyklus* gebildet wird, wenn es $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k+1 < n$ gibt, so dass W aus (v_0, \dots, v_n) durch die Entfernung der Mitte (v_k, v_{k+1}) eines Madelungzyklus gebildet wird.

7.4.4 Bemerkung. Es seien $(v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ mit $n > 2$ und $k \in \{1, \dots, n-2\}$ gegeben, so dass (v_k, v_{k+1}) die Mitte eines Madelungzyklus in $(v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ ist. Dann erhält man durch Anwenden der Definition, dass

$$v_k \in \text{conv}(v_{k+1}, v_{k+2}), \quad v_{k+1} \in \text{conv}(v_{k-1}, v_k), \quad (7.4.3a)$$

$$\text{conv}(v_{k-1}, v_{k+2}) = \text{conv}(v_{k-1}, v_k) \cup \text{conv}(v_{k+1}, v_{k+2}), \quad (7.4.3b)$$

$$\text{conv}(v_k, v_{k+1}) = \text{conv}(v_{k-1}, v_k) \cap \text{conv}(v_{k+1}, v_{k+2}), \quad (7.4.3c)$$

und somit sind (v_{k-1}, v_k, v_{k+2}) , $(v_{k-1}, v_{k+1}, v_{k+2})$, (v_{k+1}, v_k, v_{k+2}) und (v_{k-1}, v_{k+1}, v_k) Konvexitätstripel.

7.4.5 Lemma. Für $V \in S_F(X) \cap X^{n+1}$ mit $n > 2$, und $W \in X^{n-1}$, so dass W aus V durch die Entfernung eines Madelungzyklus gebildet wird, folgt, dass $W \in S_F(X)$.

Beweis. Ist $V := (v_0, \dots, v_n)$, dann gibt es ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$, so dass (v_k, v_{k+1}) die Mitte einen Madelungzyklus in $V := (v_0, \dots, v_n)$ ist und $W = (v_0, \dots, v_{k-1}, v_{k+2}, \dots, v_n)$ ist. Offensichtlich sind nur die maximal zwei neu entstandenen Tripel um das entfernte Paar daraufhin zu überprüfen, dass sie keine Konvexitätstripel sind.

- Wenn $k > 1$ ist, dann ist zu zeigen, dass $(v_{k-2}, v_{k-1}, v_{k+2})$ kein Konvexitätstripel ist.

Zum Beweis durch Widerspruch nehmen wir an, dass dieses Tripel ein Konvexitätstripel ist. Nach Bem. 7.4.4 ist (v_{k-1}, v_k, v_{k+2}) auch ein Konvexitätstripel. Somit kann für $(v_{k-2}, v_{k-1}, v_k, v_{k+2})$ die Aussage a) im Lemma 7.2.3 angewendet werden. Diese liefert dann, dass (v_{k-2}, v_{k-1}, v_k) ein Konvexitätstripel ist. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $V := (v_0, \dots, v_n)$ ein Konvexitätstripel-freier String ist.

- Wenn $k < n - 2$ ist, dann ist zu zeigen, dass $(v_{k-1}, v_{k+2}, v_{k+3})$ kein Konvexitätstripel ist.

Um auch hier einen Beweis durch Widerspruch zu führen, nehmen wir an, dass dieses Tripel ein Konvexitätstripel ist. Nach Bem. 7.4.4 ist $(v_{k-1}, v_{k+1}, v_{k+2})$ auch ein Konvexitätstripel. Darum ergibt die Aussage b) im Lemma 7.2.3 für $(v_{k-1}, v_{k+1}, v_{k+2}, v_{k+3})$, dass $(v_{k+1}, v_{k+2}, v_{k+3})$ ein Konvexitätstripel ist. Dies ist wiederum ein Widerspruch dazu, dass $V := (v_0, \dots, v_n)$ ein Konvexitätstripel-freier String ist. \square

8. Stückweise affine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings

In diesem Abschnitt seien ein topologischer Vektorraum X und eine Endzeit $T > 0$ gegeben.

8.1. Affine Funktionen

Analog zu [62, 70] werden in dieser Arbeit zeitabhängige vektorwertige Funktionen, die häufig als *linear* bezeichnet werden, als *affin* bezeichnet, da derartige Funktionen i.A. nicht zu im Sinne der linearen Algebra linearen Abbildungen vom reellen Zahlenkörper \mathbb{R} in den Vektorraum X fortgesetzt werden können. Nur für Funktionen von Teilmengen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} wird die übliche Formulierung von linearen und stückweise linearen Funktionen verwendet.

8.1.1 Definition. Es seien ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, eine Funktion $u : I \rightarrow X$ und $t_a, t_b \in I$ mit $t_a < t_b$ gegeben. Man sagt, dass u auf $[t_a, t_b]$ *affin* ist, wenn

$$u(t) = \frac{t_b - t}{t_b - t_a}u(t_a) + \frac{t - t_a}{t_b - t_a}u(t_b), \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (8.1.1)$$

8.1.2 Bemerkung. Es seien I , u , t_a und t_b wie in Def. 8.1.1 gegeben, so dass u auf $[t_a, t_b]$ affin ist. Es seien $s_1, s_2 \in [t_a, t_b]$ mit $s_1 < s_2$ gegeben. Dann gilt:

a) u ist auf $[t_a, t_b]$ stetig.

b) u ist auf $[s_1, s_2]$ affin.

c) Für alle $\lambda \in [0, 1]$ folgt, dass

$$u((1 - \lambda)s_1 + \lambda s_2) = (1 - \lambda)u(s_1) + \lambda u(s_2). \quad (8.1.2)$$

d) Für alle affinen Funktionen $v : [s_1, s_2] \rightarrow X$ gilt: Wenn $u(s_1) = v(s_1)$ und $u(s_2) = v(s_2)$ ist, dann stimmen u und v auf $[s_1, s_2]$ überein.

e) Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und jede lineare Funktion $\alpha : [a, b] \rightarrow [s_1, s_2]$: $u \circ \alpha$ ist affin auf $[a, b]$.

8.1.3 Lemma. Es seien ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, eine Funktion $u : I \rightarrow X$ und $t_a, t_b, t_c \in I$ mit $t_a < t_b < t_c$ gegeben, so dass u auf $[t_a, t_b]$ und auf $[t_b, t_c]$ affin ist. Dann gilt:

8. Stückweise affine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings

u ist auf $[t_a, t_c]$ genau dann affin, wenn

$$u(t_b) = \frac{t_c - t_b}{t_c - t_a} u(t_a) + \frac{t_b - t_a}{t_c - t_a} u(t_c). \quad (8.1.3)$$

Beweis. • Wenn u auf $[t_a, t_c]$ affin ist, dann folgt aus (8.1.1) mit t_b ersetzt durch t_c und t ersetzt durch t_b , dass (8.1.3) erfüllt ist.

• Wenn (8.1.3) gilt, dann folgt für alle $t \in [t_a, t_b]$, dass

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{t_b - t}{t_b - t_a} u(t_a) + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} u(t_b) \\ &= \frac{t_b - t}{t_b - t_a} u(t_a) + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} \left(\frac{t_c - t_b}{t_c - t_a} u(t_a) + \frac{t_b - t_a}{t_c - t_a} u(t_c) \right) \\ &= \left(\frac{t_b - t}{t_b - t_a} + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} \frac{t_c - t_b}{t_c - t_a} \right) u(t_a) + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} \frac{t_b - t_a}{t_c - t_a} u(t_c) \\ &= \frac{(t_b - t)(t_c - t_a) + (t - t_a)(t_c - t_b)}{(t_b - t_a)(t_c - t_a)} u(t_a) + \frac{t - t_a}{t_c - t_a} u(t_c). \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

Es ist

$$\begin{aligned} (t_b - t)(t_c - t_a) + (t - t_a)(t_c - t_b) &= t_b t_c - t_b t_a - t t_c + t t_a + t t_c - t t_b - t_a t_c + t_a t_b \\ &= t_b t_c + t t_a - t t_b - t_a t_c = (t_b - t_a)(t_c - t). \end{aligned} \quad (8.1.5)$$

Darum gilt

$$u(t) = \frac{t_c - t}{t_c - t_a} u(t_a) + \frac{t - t_a}{t_c - t_a} u(t_c), \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (8.1.6)$$

Eine analoge Gleichheit ergibt sich für alle $t \in [t_b, t_c]$ mit einer analogen Rechnung. Dies liefert, dass u auf $[t_a, t_c]$ affin ist. □

8.1.4 Lemma. *Es seien ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, eine Funktion $u : I \rightarrow X$ und $t_a, t_b, t_c, t_d \in I$ mit $t_a < t_b < t_c < t_d$ gegeben, so dass u auf $[t_a, t_c]$ affin ist und u auf $[t_b, t_d]$ affin ist. Dann ist u auf $[t_a, t_d]$ affin.*

Beweis. Da u auf $[t_b, t_d]$ affin ist, liefert die entsprechend umformulierte Version von (8.1.3), dass

$$u(t_c) = \frac{t_d - t_c}{t_d - t_b} u(t_b) + \frac{t_c - t_b}{t_d - t_b} u(t_d). \quad (8.1.7)$$

Mit (8.1.3) folgt, dass

$$u(t_c) = \frac{t_d - t_c}{t_d - t_b} \frac{t_c - t_b}{t_c - t_a} u(t_a) + \frac{t_d - t_c}{t_d - t_b} \frac{t_b - t_a}{t_c - t_a} u(t_c) + \frac{t_c - t_b}{t_d - t_b} u(t_d). \quad (8.1.8)$$

Multipliziert man beide Seiten mit $(t_d - t_b)(t_c - t_a)$ und bringt man den $u(t_c)$ -Term von der rechten auf die linke Seite, dann folgt nach kurzer Rechnung, dass

$$u(t_c)(t_c - t_b)(t_d - t_a) = (t_d - t_c)(t_c - t_b)u(t_a) + (t_c - t_b)(t_c - t_a)u(t_d). \quad (8.1.9)$$

Daraus ergibt sich

$$u(t_c) = \frac{t_d - t_c}{t_d - t_a} u(t_a) + \frac{t_c - t_a}{t_d - t_a} u(t_d). \quad (8.1.10)$$

Da u auf $[t_a, t_c]$ und auf $[t_c, t_d]$ affin ist, liefert jetzt das Lemma 8.1.3, dass u auf $[t_a, t_d]$ affin ist. \square

8.2. Der Raum der stückweise affinen Funktionen

8.2.1 Definition. a) Es sei $u \in \text{Map}([0, T], X)$ gegeben. Wenn es $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass u auf $[t_{i-1}, t_i]$ affin ist, dann sagt man, dass u *stückweise affin* ist, und dass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine *Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u* ist.

b) Es bezeichnet $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ die Menge der stückweise affinen Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$.

c) Ist $X_1 \subset X$ konvex und nichtleer, dann bezeichnet $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ die Menge der stückweise affinen Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X_1$.

8.2.2 Bemerkung. a) Mit Blick auf die Def. 1.1.15 folgt sofort, dass $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ für grundlegende Transformationen invariant ist.

b) Ist $X_1 \subset X$ konvex und nichtleer, dann ist auch $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ für grundlegende Transformationen invariant.

8.2.3 Definition. Es seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ und $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = T$ mit $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeben, so dass $m \geq n$ ist, und es für jedes $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $i = 1, \dots, n$ ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k = 1, \dots, m - 1$ gibt, so dass $t_i = s_k$ ist. Dann nennt man $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = T$ eine *Verfeinerung der Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$* .

8.2.4 Bemerkung. Es sei $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Dann ist jede Verfeinerung einer Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u wieder eine Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

8.2.5 Lemma. Es sei $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u . Wenn man $s_0 = 0$, $i = 0$ und $m_0 = 0$ setzt, und dann die Setzungen

$$i := i + 1,$$

$$m_i := \max\{k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, n\} \mid u \text{ ist auf } [t_{i-1}, t_k] \text{ eine affine Funktion}\}, \quad (8.2.1)$$

$$s_i := t_{m_i}, \quad (8.2.2)$$

wiederholt, bis $m_i = n$ ist, dann ist $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_i = T$ die eindeutig definierte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u , so dass für alle $i = 1, \dots, m - 1$ u auf $[s_{i-1}, s_{i+1}]$ nicht affin ist.

8. Stückweise affine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings

Beweis. Die Konstruktion liefert, dass $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_i = T$ eine Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u ist, welche die gewünschten Eigenschaften hat.

Es sei eine beliebige Affinitäts-Zerlegung $0 = s'_0 < s'_1 < \dots < s'_{i'} = T$ von $[0, T]$ bezüglich u mit den gewünschten Eigenschaften gegeben.

Per Induktion folgt, dass $s'_j = s_k$ und $k \leq i'$ für $k = 0, \dots, i$ ist:

Ind.Beg.: Es ist $s_0 = 0 = s'_0$,

Ind.Sch.: Es sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k \leq i$ so, dass $k - 1 \leq i'$ und $s_{k-1} = s'_{k-1}$ ist. Dann ist $s_{k-1} < T$ und somit $k \leq i'$. Mit dem folgenden Widerspruchsbeweis folgt, dass $s_k = s'_k$ sein muss:

- Ang., es ist $s_k > s'_k$. Dann ist $s'_k < T$ und somit $k < i'$. Da u auf $[s_{k-1}, s_k]$ und auf $[s'_k, s'_{k+1}]$ affin ist, und $s_k > s'_k$ ist, folgt mit dem Lem. 8.1.4, dass u auf $[s_{k-1}, s'_{k+1}] = [s'_{k-1}, s'_{k+1}]$ affin ist, was den geforderten Eigenschaften an die Zerlegung widerspricht.
- Die Annahme, dass $s_k < s'_k$ ist, führt analog zu einem Widerspruch.

Also ist $s'_i = s_i = T$. Dies liefert, dass auch $i = i'$ ist.

Somit ist die Affinitäts-Zerlegung mit den gewünschten Eigenschaften eindeutig definiert. \square

Das obige Lemma liefert, dass die folgende Definition wohldefiniert ist:

8.2.6 Definition. Es sei $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Wenn $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u ist, so dass für alle $i = 1, \dots, n - 1$ die Funktion u auf $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ nicht affin ist, dann ist $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die *Standard-Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u* .

8.2.7 Lemma. Es sei $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n$, und alle $s \in [t_{i-1}, t_i[$, dass

$$t_i = \max \{ t \in]s, T] \mid u \text{ ist auf } [t_{i-1}, t] \text{ eine affine Funktion} \}. \quad (8.2.3)$$

Beweis. Die Definition liefert, dass u auf $[t_{i-1}, t_i]$ affin ist. Also bleibt nur zu zeigen, dass es kein $t > t_i$ und kein $s \in [t_{i-1}, t_i[$ gibt, so dass u auf $[t_{i-1}, t]$ affin ist.

Angenommen die Aussage ist falsch, d.h. angenommen, es gibt ein $t > t_i$ und ein $s \in [t_{i-1}, t_i[$, so dass u auf $[s, t]$ affin ist. Dann ist $i < n$. Da u auf $[t_{i-1}, t]$ und auf $[s, t]$ affin ist, liefert das Lemma 8.1.4, dass u auf $[t_i, t]$ affin ist. Da aber u auch auf $[t_i, t_{i+1}]$ affin ist, liefert eine erneute Anwendung des Lemmas 8.1.4, dass u auf $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ affin ist. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von t_{i+1} . \square

Aus dem Lemma folgt sofort:

8.2.8 Korollar. Es sei $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Dann ist jede Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u eine Verfeinerung der Standard-Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

8.3. Verbindung zwischen stückweise affinen Funktionen und Strings

8.3.1 Definition. a) Es sei $V = (v_0, \dots, v_n) \in S_F(X)$ gegeben. Die Funktion

$$\pi_{\text{pw.af.}}[V] : [0, T] \rightarrow \text{conv}\{v_0, \dots, v_n\}$$

ist definiert als die stückweise affine Funktion, die gleich v_i zu den Zeiten $t_i := \frac{i}{n}T$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$ ist, und die für alle $i = 1, \dots, n$ auf $[t_{i-1}, t_i]$ affin ist. Somit gilt für alle $i = 1, \dots, n$, dass

$$\begin{aligned} \pi_{\text{pw.af.}}[V](t) &= \left(i - \frac{n}{T}t\right) v_{i-1} + \left(\frac{n}{T}t - (i-1)\right) v_i \\ &= ((t_i - t) v_{i-1} + (t - t_{i-1}) v_i) \frac{n}{T}. \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]. \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

b) Der durch $S(X) \ni V \mapsto \pi_{\text{pw.af.}}(V)$ definierte Operator $\pi_{\text{pw.af.}} : S(X) \rightarrow C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ wird als *Interpolations-Operator auf X* bezeichnet.

8.3.2 Lemma. Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Dann gilt

$$\pi_{\text{pw.af.}}(S(X_1)) \subseteq C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1). \quad (8.3.2)$$

Beweis. Für $V = (v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ liefert die Def. (8.3.1) für alle $t \in [0, T]$, dass sich $v(t)$ als Konvexkombination von $v_{i-1} \in X_1$ und $v_i \in X_1$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ schreiben lässt. Da X_1 konvex ist, folgt das $v(t) \in X_1$ ist. \square

8.3.3 Lemma. Es sei $V = (v_0, \dots, v_n) \in S(X)$ gegeben. Es sei $t_i := \frac{i}{n}T$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann gilt:

- a) Es ist $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ eine Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$.
- b) Wenn $2v_i \neq v_{i-1} + v_{i+1}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ gilt, dann ist $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ die Standard-Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$.
- c) Es gibt eine stückweise lineare zulässige Zeittransformation $\text{redutrans}_V : [0, T] \rightarrow [0, T]$, so dass

$$\pi_{\text{pw.af.}}[V] = \pi_{\text{pw.af.}}[\text{redu}(V)] \circ \text{redutrans}_V. \quad (8.3.3)$$

Beweis. a) Da $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{i-1}, t_i]$ für $i = 1, \dots, n$ affin ist, folgt unmittelbar das $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ eine Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ ist.

b) Es gilt für alle $i = 1, \dots, n-1$: Es ist $2v_i \neq v_{i-1} + v_{i+1}$, und somit

$$v_i \neq \frac{1}{2}v_{i-1} + \frac{1}{2}v_{i+1} = \frac{t_i - t_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}v_{i-1} + \frac{t_{i+1} - t_i}{t_{i+1} - t_{i-1}}v_{i+1}. \quad (8.3.4)$$

Also ist nach dem Lemma 8.1.3 u auf $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ nicht affin. Somit ist $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ die Standard-Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

8. Stückweise affine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings

- c) i) Für $V \in S_F(X)$ sei $\text{redutrans}_V : [0, T] \rightarrow [0, T]$ die Identität. Dann gilt (8.3.3).
 ii) Wenn $v_0 = v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dann ist $\text{redu}(V) = (v_0, v_0)$ und $\pi_{\text{pw.af.}}[V] \equiv v_0 \equiv \pi_{\text{pw.af.}}[\text{redu}(V)]$. Definiert man jetzt $\text{redutrans}_V : [0, T] \rightarrow [0, T]$ als die Identität, dann folgt das (8.3.3) gilt.
 iii) In allen andern Fällen seien i_* und w_i, N_i, m_i für $i = 0, \dots, i_*$ wie im Lem. 7.3.8 gegeben. Dann gilt nach Def. 7.3.9 und Lemma 7.3.8, dass $\text{redu}(V) = (w_0, \dots, w_{i_*}) = (v_{m_0}, \dots, v_{m_{i_*}})$ ist und dass $w_{i-1} \neq w_i$ für alle $i = 1, \dots, i_*$.

Es sei $t_i = \frac{i}{n}T$ für $i = 0, \dots, n$ und $s_i = \frac{i}{i_*}T$ für $i = 0, \dots, i_*$.

Es sei $\tilde{t}_{m_i} := s_i$ für alle $i = 0, \dots, i_*$.

Für alle $i = 1, \dots, i_*$, so dass $m_{i-1} + 1 \neq m_i$ und somit $m_{i-1} + 1 < m_i$ ist, gilt für alle $k = m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1$:

Nach Lem. 7.3.8 gilt, dass (w_{i-1}, v_k, w_i) ein Konvexitätstripel ist. Also gibt es $\lambda_{i,k} \in [0, 1]$, so dass

$$v_k = (1 - \lambda_{i,k}) w_{i-1} + \lambda_{i,k} w_i. \quad (8.3.5)$$

Dann sei

$$\tilde{t}_k := (1 - \lambda_{i,k}) s_{i-1} + \lambda_{i,k} s_i \in [s_{i-1}, s_i] = [\tilde{t}_{m_{i-1}}, \tilde{t}_{m_i}]. \quad (8.3.6)$$

Dann ist, da $\pi_{\text{pw.af.}}[\text{redu}(V)]$ auf $[s_{i-1}, s_i]$ affin ist,

$$\begin{aligned} \pi_{\text{pw.af.}}[\text{redu}(V)](\tilde{t}_k) &= (1 - \lambda_{i,k}) \pi_{\text{pw.af.}}[\text{redu}(V)](s_{i-1}) + \lambda_{i,k} \pi_{\text{pw.af.}}[\text{redu}(V)](s_i) \\ &= (1 - \lambda_{i,k}) w_{i-1} + \lambda_{i,k} w_i = v_k = \pi_{\text{pw.af.}}[V](t_k). \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

Wenn $k + 1 < m_i$ ist, dann folgt, da nach Konstruktion (w_{i-1}, v_k, v_{k+1}) ein Konvexitätstripel ist, dass es ein $\lambda \in [0, 1]$ gibt, so dass $v_k = (1 - \lambda)w_{i-1} + \lambda v_{k+1}$ ist. Dies liefert

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_{i,k}) w_{i-1} + \lambda_{i,k} w_i &= v_k = (1 - \lambda)w_{i-1} + \lambda(1 - \lambda_{i,k+1}) w_{i-1} + \lambda \lambda_{i,k+1} w_i. \\ &= (1 - \lambda + \lambda - \lambda \lambda_{i,k+1}) w_{i-1} + \lambda \lambda_{i,k+1} w_i. \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

Also ist $\lambda_{i,k}(w_i - w_{i-1}) = \lambda \lambda_{i,k+1}(w_i - w_{i-1})$. Da $w_{i-1} \neq w_i$ ist, liefert dies, dass $\lambda_{i,k} = \lambda \lambda_{i,k+1} \leq \lambda_{i,k+1}$. Also ist

$$\tilde{t}_k = s_{i-1} + \lambda_{i,k}(s_i - s_{i-1}) \leq s_{i-1} + \lambda_{i,k+1}(s_i - s_{i-1}) = \tilde{t}_{k+1}. \quad (8.3.9)$$

Insgesamt gilt somit $\pi_{\text{pw.af.}}[\text{redu}(V)](\tilde{t}_k) = \pi_{\text{pw.af.}}[V](t_k)$ für alle $k = 0, \dots, n$, und $\tilde{t}_{k-1} \leq \tilde{t}_k$ für alle $k = 1, \dots, n$. Sei jetzt $\text{redutrans}_V : [0, T] \rightarrow [0, T]$ die stückweise lineare Funktion, so dass $\text{redutrans}_V(t_k) = \tilde{t}_k$ ist für alle $k = 0, \dots, n$ und redutrans_V auf $[t_{k-1}, t_k]$ linear ist für alle $k = 0, \dots, n$. Dann ist $\text{redutrans}_V(0) = 0$, $\text{redutrans}_V(T) = T$ und redutrans_V ist stetig und monoton steigend. Also ist redutrans_V eine stückweise lineare zulässige Zeittransformation. Für alle $k = 1, \dots, n$ bildet redutrans_V den Intervall $[t_{k-1}, t_k]$ linear in einen Intervall ab, auf dem $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ affin ist. Also ist $\pi_{\text{pw.af.}}[V] \circ \text{redutrans}_V$ affin auf $[t_{k-1}, t_k]$.

8.4. Madelungzyklus, Entfernung der Mitte von Madelungzyklen und zugehörige Fkt.

Für alle $k = 0, \dots, n$ ist

$$\pi_{\text{pw.af.}}[\text{redu}(V)] \circ \text{redutrans}_V(t_K) = \pi_{\text{pw.af.}}[\text{redu}(V)](\tilde{t}_k) = \pi_{\text{pw.af.}}[V](t_k). \quad (8.3.10)$$

Da beide Funktionen für alle $k = 1, \dots, n$ auf $[t_{k-1}, t_k]$ affin sind, folgt dass (8.3.3) gilt. □

8.3.4 Lemma. *Es sei $V \in S(X)$ gegeben. Wenn $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum ist, dann ist*

$$|V|_\infty = \max\{\|\pi_{\text{pw.af.}}[V](t)\|_X \mid t \in [0, T]\}. \quad (8.3.11)$$

8.3.5 Definition. Der *Richtungswechselstellen-Operator* $\nu_S : C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X) \rightarrow S(X)$ bildet $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ mit der Standard-Affinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u auf $\nu_S(u) = (u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)) \in S(X)$ ab.

8.3.6 Lemma. *Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Dann gilt*

$$\nu_S(C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)) = S(X_1). \quad (8.3.12)$$

8.4. Madelungzyklus, Entfernung der Mitte von Madelungzyklen und zugehörige Funktionen

8.4.1 Bemerkung. Es sei $V = (v_0, \dots, v_n) \in S_F(X)$ mit $n > 2$ gegeben. Es sei ein $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $i + 1 < n$ gegeben, so dass (v_i, v_{i+1}) die Mitte eines Madelungzyklus in $(v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ bildet.

- a) Betrachtet man jetzt die Funktion $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$, dann stellt man fest, dass diese den Intervall $[\frac{i-1}{n}T, \frac{i}{n}T]$ auf die Strecke von v_{i-1} bis v_i abbildet. Zur Zeit $\frac{i}{n}T$ dreht die Funktion ihre Richtung um, und läuft auf der Strecke von v_{i-1} zu v_i in entgegengesetzter Richtung von v_i in Richtung v_{i-1} zurück, erreicht diesen Punkt i.A. aber nicht. Noch auf der Strecke, beim Erreichen des Punktes v_{i+1} zur Zeit $\frac{i+1}{N}T$ dreht die Funktion wieder, und durchläuft die Strecke noch einmal in Gegenrichtung und bleibt dann bis zur Zeit $\frac{i+2}{N}T$ auf der Geraden, welche die Verlängerung der ursprünglichen Strecke bildet, und erreicht dann den Punkt v_{i+1} .
- b) Betrachtet wird jetzt für $W := (v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+2}, \dots, v_n) \in X^{n-1}$, welches aus $(v_0, \dots, v_n) \in X^{n+1}$ durch Entfernung der Mitte (v_i, v_{i+1}) eines Madelungzyklus gebildet wird, die Funktion $\pi_{\text{pw.af.}}[W]$. Diese Funktion bildet den Intervall $[\frac{i-1}{n-2}T, \frac{i}{n-2}T]$ auf die Strecke von v_{i-1} bis v_{i+2} ab, und dabei wird diese Strecke nur einmal durchlaufen, und zwar ohne einen Wechsel der Richtung. Auf den Intervallen $[0, \frac{i-1}{n-2}T]$ und $[\frac{i}{n-2}T, T]$ ergibt sich $\pi_{\text{pw.af.}}[W]$ indem man die Werte von $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf den Intervallen $[0, \frac{i-1}{n}T]$ bzw. $[\frac{i+2}{n}T, T]$ zeitlich umskaliert.

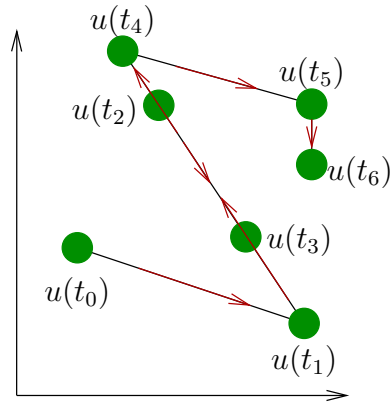


Abbildung 8.1.: Beispiel für $u = \pi_{\text{pw.af.}}[V]$ mit $V = (v_0, \dots, v_6)$, so dass (v_2, v_3) die Mitte eines Madelungzyklus ist.

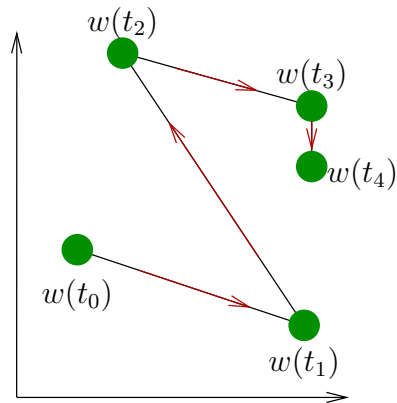


Abbildung 8.2.: Beispiel für $w = \pi_{\text{pw.af.}}[W]$, wobei W aus V wie in Fig. 8.1 durch die Entfernung der Mitte (v_2, v_3) eines Madelungzyklus gebildet wird.

9. Hysterese-Operatoren auf dem Raum der stückweise affinen Funktionen und String-Funktionen

In diesem Abschnitt seien ein topologischer Vektorraum X , eine konvexe, nichtleere Teilmenge X_1 von X und eine Endzeit $T > 0$ gegeben. Es sei eine nichtleere Menge Y gegeben.

9.1. Definition der von Hysterese-Operatoren ohne Anfangszustand generierten Funktionen auf Strings

9.1.1 Definition. Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Operator, so dass alle stückweise affinen Funktionen von $[0, T]$ nach X_1 zum Definitionsbereich gehören, d.h. so dass $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1) \subseteq D(\mathcal{H})$.

- a) Die von \mathcal{H} generierte String-Funktion von $S(X_1)$ nach Y ist die Funktion $\text{Gen}_{S(X_1)}\langle\mathcal{H}\rangle : S(X_1) \rightarrow Y$, die dadurch definiert ist, dass

$$\text{Gen}_{S(X_1)}\langle\mathcal{H}\rangle(V) := \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]](T), \quad \forall V \in S(X_1). \quad (9.1.1)$$

- b) Die von \mathcal{H} auf $S_F(X_1)$ generierte Funktion $\text{Gen}_{S_F(X_1)}\langle\mathcal{H}\rangle : S_F(X_1) \rightarrow Y$ ist die Einschränkung von $\text{Gen}_{S(X_1)}\langle\mathcal{H}\rangle$ auf $S_F(X_1)$.

9.1.2 Lemma. Es sei X_2 eine konvexe und nichtleere Teilmenge von X mit $X_1 \subset X_2$. Es sei $\mathcal{H}_2 : D(\mathcal{H})(\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Operator mit $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_2) \subseteq D(\mathcal{H})$.

Definiert man jetzt \mathcal{H}_1 durch die Einschränkung von \mathcal{H}_2 auf $D(\mathcal{H}_2) \cap \text{Map}([0, T], X_1)$, dann gilt:

$$\text{Gen}_{S(X_1)}\langle\mathcal{H}_1\rangle = \text{Gen}_{S(X_2)}\langle\mathcal{H}_2\rangle|_{S(X_1)}. \quad (9.1.2)$$

Beweis. Für alle $V \in S(X_1)$ ist $V \in S(X_2)$ und somit nach der Definition

$$\text{Gen}_{S(X_2)}\langle\mathcal{H}_2\rangle|_{S(X_1)}(V) = \text{Gen}_{S(X_2)}\langle\mathcal{H}_2\rangle(V) = \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]](T) = \text{Gen}_{S(X_1)}\langle\mathcal{H}\rangle(V). \quad (9.1.3)$$

□

9.1.3 Satz. Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1) \subseteq D(\mathcal{H})$. Dann gilt

9. Hysterese-Operatoren auf dem Raum der stückweise affinen Fkt. und String-Fkt.

- a) Für alle $V, W \in S(X_1)$, so dass man W durch die Entfernung von Konvexitätstrippeln aus V gewinnen kann, gilt

$$\text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (V) = \text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (W). \quad (9.1.4)$$

- b) Für alle $V \in S(X_1)$ gilt

$$\text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (V) = \text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (\text{redu}(V)) = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (\text{redu}(V)), \quad (9.1.5)$$

d.h. $\text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$ ist die kanonische Erweiterung von $\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$.

- c) Im Sinne der Def. 7.3.16 vergisst $\text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$ das Entfernen von Konvexitätstrippeln.

Beweis. a) Die Gültigkeit von (9.1.4) folgt per Induktion, wenn man zeigt, dass die Gleichung für alle W gilt, die man durch die Entfernung der Mitte **eines** Konvexitätstrippels aus V gewinnt.

Seien also $V = (v_0, \dots, v_n)$ mit $n > 1$ und $k \in \{1, \dots, n-1\}$, so dass (v_{k-1}, v_k, v_{k+1}) einen Konvexitätstrippel ist, gegeben. Es sei

$$W = (w_0, \dots, w_{n-1}) := (v_0, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n).$$

Dann gibt es ein $\lambda \in [0, 1]$, so dass $v_k = (1 - \lambda)v_{k-1} + \lambda v_{k+1}$ ist.

Es sei $t_i := \frac{i}{n}T$ für alle $i = 0, \dots, n$ und $s_j := \frac{j}{n-1}T$ für alle $j = 0, \dots, n-1$. Dann ist $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{i-1}, t_i]$ affin für alle $i = 1, \dots, n$ und $\pi_{\text{pw.af.}}[W]$ auf $[s_{j-1}, s_j]$ affin für alle $j = 1, \dots, n-1$.

Sei nun $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ dadurch definiert, dass α auf $[t_{i-1}, t_i]$ für $i = 1, \dots, n$ linear ist, und dass

$$\begin{aligned} \alpha(t_i) &:= s_i, \quad \forall i = 0, \dots, k-1, \\ \alpha(t_k) &:= (1 - \lambda)s_{k-1} + \lambda s_k, \\ \alpha(t_j) &:= s_{j-1}, \quad \forall j = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dann ist α eine stückweise lineare, zulässige Zeittransformation. Für $i = 1, \dots, k-1$ bildet α den Intervall $[t_{i-1}, t_i]$ auf $[s_{i-1}, s_i]$ ab, für $j = k, \dots, n-1$ bildet α den Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ auf $[s_{j-1}, s_j]$ ab. Weiterhin sind $\alpha([t_{k-1}, t_k])$ und $\alpha([t_k, t_{k+1}])$ Teilmengen von $[s_{k-1}, s_k]$. Dies sind alle Mengen, auf denen $\pi_{\text{pw.af.}}[W]$ affin ist. Da α auf den betrachteten Intervallen linear ist, folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[W] \circ \alpha$ auf dem Intervall $[t_{i-1}, t_i]$ für alle $i = 1, \dots, n$ affin ist.

Für $i = 0, \dots, k-1$ gilt

$$\pi_{\text{pw.af.}}[W] \circ \alpha(t_i) = \pi_{\text{pw.af.}}[W](s_i) = w_i = v_i, \quad (9.1.6)$$

für $j = k+1, \dots, n$ gilt

$$\pi_{\text{pw.af.}}[W] \circ \alpha(t_j) = \pi_{\text{pw.af.}}[W](s_{j-1}) = w_{j-1} = v_j, \quad (9.1.7)$$

9.1. Def. der von Hysterese-Operatoren ohne Anfangszustand generierten Fkt. auf Strings

und es gilt

$$\begin{aligned}\pi_{\text{pw.af.}}[W] \circ \alpha(t_k) &= \pi_{\text{pw.af.}}[W]((1-\lambda)s_{k-1} + \lambda s_k) \\ &= (1-\lambda)\pi_{\text{pw.af.}}[W](s_{k-1}) + \lambda\pi_{\text{pw.af.}}[W](s_k) \\ &= (1-\lambda)w_{k-1} + \lambda w_k = (1-\lambda)v_{k-1} + \lambda v_{k+1} = v_k.\end{aligned}\quad (9.1.8)$$

Man sieht so, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[W] \circ \alpha$ die Funktion ist, die als $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ definiert wurde. Die Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H} liefert somit, dass

$$\begin{aligned}\text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle(V) &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]](T) = \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[W] \circ \alpha](T) \\ &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[W]](\alpha(T)) = \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[W]](T) = \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle(W).\end{aligned}\quad (9.1.9)$$

Also ist (9.1.4) bewiesen.

b) Für $V \in S_F(X_1)$ gilt (9.1.5) sofort.

Für $V \notin S_F(X_1)$ ist $\text{redu}(V) \neq V$, und mit dem Korollar 7.3.11 ergibt sich, dass man $\text{redu}(V)$ durch die Entfernung von Konvexitätsstripelmitten aus V erhält. Dann liefert die Aussage a) die gewünschte Gleichheit.

c) Die Aussage folgt unmittelbar aus a).

□

9.1.4 Lemma. *Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \text{Map}([0, T], X_1)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1) \subseteq D(\mathcal{H})$. Es seien eine nichtleere Menge Z , eine Teilmenge Y_0 von Y und eine Abbildung $f : Y_0 \rightarrow Z$ gegeben, so dass $f \circ \mathcal{H}$ im Sinne der Definition 2.1.1 ein wohldefinierter Operator ist. Dann gilt*

$$\text{Gen}_{S(X_1)}\langle f \circ \mathcal{H} \rangle = f \circ \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle, \quad \text{Gen}_{S_F(X_1)}\langle f \circ \mathcal{H} \rangle = f \circ \text{Gen}_{S_F(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle. \quad (9.1.10)$$

Beweis. Folgt unmittelbar durch Anwenden der Definition.

□

9.1.5 Lemma. *Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \text{Map}([0, T], X_1)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1) \subseteq D(\mathcal{H})$.*

Es seien $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ und eine Affinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich von u gegeben. Dann gilt

$$\mathcal{H}[u](T) = \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle((u(t_0), \dots, u(t_n))). \quad (9.1.11)$$

Beweis. Für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt, dass u auf $[t_{i-1}, t_i]$ affin ist.

Sei jetzt $s_i := \frac{i}{n}T$ für alle $i = 0, \dots, n$. Sei $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ dadurch definiert, dass $\alpha(0) = 0$ ist, und für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass $\alpha(t_i) = s_i$ ist, und α auf $[t_{i-1}, t_i]$ linear ist. Es sei $V := (u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n))$. Dann ist $\pi_{\text{pw.af.}}[V] : [0, T] \rightarrow X$ auf $\alpha([t_{i-1}, t_i]) = [s_{i-1}, s_i]$ affin, und somit $\pi_{\text{pw.af.}}[V] \circ \alpha$ auf $[t_{i-1}, t_i]$ affin für alle $i = 1, \dots, n$.

Da außerdem

$$\pi_{\text{pw.af.}}[V] \circ \alpha(t_i) = \pi_{\text{pw.af.}}[V](s_i) = u(t_i), \quad \forall i = 0, \dots, n, \quad (9.1.12)$$

9. Hysterese-Operatoren auf dem Raum der stückweise affinen Fkt. und String-Fkt.

folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[V] \circ \alpha = u$. Somit liefert die Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H} , dass

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[u](T) &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[V] \circ \alpha](T) = \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]](\alpha(T)) \\ &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]](T) = \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle (V).\end{aligned}\tag{9.1.13}$$

□

9.1.6 Lemma. *Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subset \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1) \subseteq D(\mathcal{H})$.*

Es sei $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ und eine Affinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich von u gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[u](t) &= \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle ((u(t_0), u(t))) = \text{Gen}_{S_F(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle \left(\text{redu}((u(t_0), u(t))) \right), \\ &\quad \forall t \in [t_0, t_1].\end{aligned}\tag{9.1.14}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[u](t) &= \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle ((u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t))) \\ &= \text{Gen}_{S_F(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle \left(\text{redu}((u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t))) \right), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{9.1.15}$$

Beweis. Es ist jeweils nur die erste Gleichung zu zeigen, die zweite folgt aus dem Satz 9.1.3.

Für $t = T$ folgt die Gleichung (9.1.15) (wenn $n > 1$ ist) bzw. (9.1.14) (wenn $n = 1$ ist), unmittelbar aus Lem. 9.1.5.

Für $t \in [0, T]$ sei $\mathcal{C}_t[u]$ wie in Def. 1.1.14. Dann ist $\mathcal{C}_t[u] \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$. Wendet man also das Korollar 1.4.1 auf die Einschränkung von \mathcal{H} auf $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ an, folgt dass

$$\mathcal{H}[u](t) = \mathcal{H}[\mathcal{C}_t[u]](T).\tag{9.1.16}$$

- Es ist $\mathcal{C}_0[u] \equiv u(0)$ auf $[0, T]$. Dann ist $0 = s_0 < s_1 = T$ eine Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für $\mathcal{C}_0[u]$. Mit (9.1.11) folgt nun, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[\mathcal{C}_0[u]](T) &= \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle ((\mathcal{C}_0[u](s_0), \mathcal{C}_0[u](s_1))) \\ &= \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle ((u(t_0), u(t_0))).\end{aligned}\tag{9.1.17}$$

Somit ergibt sich mit (9.1.16), dass die erste Gleichung in (9.1.14) für $t = 0 = t_0$ bewiesen ist.

- Für $t \in (0, T)$ gibt es ein eindeutiges $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass $t \in [t_{i-1}, t_i]$.

Da $\mathcal{C}_t[u]$ auf $[t, T]$ konstant ist, folgt dass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t < T = T$ eine Affinitäts-Zerlegung von $\mathcal{C}_t[u]$ ist. Also erhält man mit (9.1.11), dass

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[\mathcal{C}_t[u]](T) &= \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle ((\mathcal{C}_t[u](t_0), \dots, \mathcal{C}_t[u](t_{i-1}), \mathcal{C}_t[u](t), \mathcal{C}_t[u](T))) \\ &= \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle ((u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t), u(t))).\end{aligned}\tag{9.1.18}$$

9.2. Definition von Funktionen auf Strings für Operatoren mit Anfangszustand

Da $(u(t_{i-1}), u(t), u(t))$ ein Konvexitätstripel ist, kann man somit $(u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t))$ aus $(u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t), u(t))$ durch das Entfernen der Mitte eines Konvexitätstripels gewinnen. Dann liefert der Satz 9.1.3, dass

$$\mathcal{H}[\mathcal{C}_t[u]](T) = \text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle \left((u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t)) \right). \quad (9.1.19)$$

Mit (9.1.16) erhält man, dass

$$\mathcal{H}[u](t) = \text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle \left((u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t)) \right). \quad (9.1.20)$$

Dies liefert für $t \leq t_1$, das (9.1.14) gilt, und für $t \in]t_1, T]$, dass (9.1.15) gilt. \square

Dass die Operatoren nur auf Funktionen in $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ angewendet werden, ist für die Gültigkeit von (9.1.14) und (9.1.15) wichtig. Man kann die Gleichungen zwar noch für Funktionen, die stetig und stückweise monotaffin (vgl. Def. 10.1.1) sind, herleiten, siehe Satz 11.2.2; für unstetige Input-Funktionen gelten die Gleichungen aber im Allgemeinen nicht, siehe Bem. 11.2.3.

9.1.7 Lemma. *Es seien zwei Hysterese-Operatoren $\mathcal{G}, \mathcal{H} : C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.*

Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

a)

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}. \quad (9.1.21)$$

b) *Für die nach Def. 9.1.1 definierten Funktionen $\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{G} \rangle, \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gilt*

$$\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{G} \rangle = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle. \quad (9.1.22)$$

Beweis. **a) \implies b)** Klar.

b) \implies a) Mit dem Lemma 9.1.5 folgt aus der Gültigkeit von (9.1.22), dass $\mathcal{H}[u](T) = \mathcal{G}[u](T)$ für alle $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ gilt. Da $D(\mathcal{G}) = D(\mathcal{H}) = C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ für grundlegende Transformationen invariant ist, liefert nun das Lemma 1.4.2, dass $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ ist. \square

9.2. Definition von Funktionen auf Strings für Operatoren mit Anfangszustand

9.2.1 Definition. Es seien zwei nichtleere Mengen Z und Z_1 mit $Z_1 \subseteq Z$ gegeben.

Es sei ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}([0, T], X_1)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand in Z gegeben, so dass $Z_1 \times C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1) \subseteq D(\mathcal{H})$.

9. Hysterese-Operatoren auf dem Raum der stückweise affinen Fkt. und String-Fkt.

- a) Die von \mathcal{H} auf $Z_1 \times S(X_1)$ generierte Funktion $\text{Gen}_{Z_1 \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle : Z_1 \times S(X_1) \rightarrow Y$ ist definiert durch

$$\text{Gen}_{Z_1 \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (z_0, V) = \text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H}[z_0, \cdot] \rangle (V), \quad \forall z_0 \in Z, V \in S(X_1). \quad (9.2.1)$$

- b) Die von \mathcal{H} auf $Z_1 \times S_F(X_1)$ generierte Funktion $\text{Gen}_{Z_1 \times S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle : Z_1 \times S_F(X_1) \rightarrow Y$ ist die Einschränkung von $\text{Gen}_{Z_1 \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$ auf $Z_1 \times S_F(X_1)$.

Genaueres Betrachten der beiden Definitionen liefert die Äquivalenz des beiden möglichen Wege, $\text{Gen}_{Z_1 \times S_F(X_1)} \langle \cdot \rangle$ zu definieren:

9.2.2 Lemma. *Es seien zwei nichtleere Mengen Z und Z_1 mit $Z_1 \subset Z$ gegeben. Es sei ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}([0, T], X_1)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand gegeben, so dass $Z_1 \times C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1) \subseteq D(\mathcal{H})$. Dann gilt für alle $z_0 \in Z_1, V \in S_F(X_1)$*

$$\text{Gen}_{Z_1 \times S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (z_0, V) = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}[z_0, \cdot] \rangle (V). \quad (9.2.2)$$

Die Halbgruppeneigenschaft wie in [8, Remark 2.4.3] überträgt sich

9.2.3 Lemma. *Es sei Z eine nichtleere Menge. Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Es sei ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}([0, T], X_1)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand gegeben, der die Halbgruppeneigenschaft hat, so dass $Z_1 \times C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ eine Teilmenge von $D(\mathcal{H})$ ist. Es sei concat_{X_1} definiert wie in Def. 7.1.7. Dann gilt für alle $z_0 \in Z_1$ und alle $V, W \in S(X_1)$, dass*

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (z_0, \text{concat}_{X_1}(V, W)) \\ &= \text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (\text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (z_0, V), W). \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

Beweis. Folgt durch Kombination der Definition von $\text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$ und der Halbgruppeneigenschaft. \square

9.2.4 Korollar. *Es sei Z eine nichtleere Menge. Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Es sei ein Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}([0, T], X_1)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand gegeben, der die Halbgruppeneigenschaft hat, so dass $Z_1 \times C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ eine Teilmenge von $D(\mathcal{H})$ ist. Dann gilt für alle $z_0 \in Z_1, (v_0, v_1, \dots, v_n) \in S(X_1)$ mit $n > 2$*

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (z_0, (v_0, v_1, v_2)) \\ &= \text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (\text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (z_0, (v_0, v_1)), (v_1, v_2)), \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (z_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (\text{Gen}_{Z \times S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (z_0, (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), (v_{n-1}, v_n)). \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

Beweis. Folgt aus dem Lemma 9.2.3. \square

Teil IV.

**Monotaffine Funktionen, das
Darstellungsergebnis für
Hysteresis-Operatoren, die auf stetigen,
stückweise monotaffinen Funktionen
definiert sind, und Anwendungen des
Ergebnisses**

10. Stückweise monotaffine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings mit und ohne Konvexitätstripel

10.1. Monotaffine Funktionen: Definition

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest, und es sei X ein topologischer Vektorraum, und es sei $u : [0, T] \rightarrow X$ eine Funktion.

Um eine geeignete Verallgemeinerung des Begriffs von Monotonie für skalare Funktionen auf vektorwertige Funktionen zu erhalten, wird die Verknüpfung einer **monotonen** und einer **affinen** Funktion betrachtet, um im Folgenden als **monotaffine** Funktion bezeichnet zu werden.

10.1.1 Definition. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben. u wird als *monotaffin auf $[t_a, t_b]$* bzw. als *eine auf $[t_a, t_b]$ monotaffine Funktion* bezeichnet, wenn es eine monoton steigende (nicht unbedingt streng monoton steigende) Funktion $\beta : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ gibt, so dass $\beta(t_a) = 0$, $\beta(t_b) = 1$ und

$$u(t) = (1 - \beta(t))u(t_a) + \beta(t)u(t_b), \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (10.1.1)$$

Das folgende Lemma zeigt, dass man die Bedingungen an $\beta(t_a)$ und $\beta(t_b)$ aus der Definition entfernen kann, und die gleichen Funktionen als monotaffine Funktionen erhalten würde. Allerdings wäre die Definition ohne diese Bedingungen¹ schwerer zu verstehen.

10.1.2 Lemma. Seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ und eine monoton steigende (nicht unbedingt streng monoton steigende) Funktion $\beta : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ gegeben, so dass (10.1.1) gilt.

Dann folgt, dass u monotaffin auf $[t_a, t_b]$ ist.

Beweis. • Wenn $u(t_a) \neq u(t_b)$ ist, dann folgt aus (10.1.1) für $t = t_a$ und für $t = t_b$, dass

$$0 = \beta(t_a)(u(t_b) - u(t_a)), \quad 0 = (1 - \beta(t_b))(u(t_a) - u(t_b)). \quad (10.1.2)$$

Also ist $\beta(t_a) = 0$ und $\beta(t_b) = 1$.

- Wenn $u(t_a) = u(t_b)$ ist, dann folgt aus (10.1.1), dass $u \equiv u(t_a)$ auf $[t_a, t_b]$.

Somit gilt (10.1.1) auch, wenn β durch die lineare Funktion auf $[t_a, t_b]$ ersetzt wird, die bei t_a gleich 0 und bei t_b gleich 1 ist. \square

¹Diese Bedingungen an $\beta(t_a)$ und $\beta(t_b)$ folgen dem Gutachten [3] für [27]. In der ursprünglichen Formulierung der Definition des Autors, siehe [29, 28], waren diese nicht enthalten.

10. Stückweise monotaffine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings

10.1.3 *Bemerkung.* Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben.

- a) Wenn u auf $[t_a, t_b]$ eine affine Funktion ist, dann ist u auf $[t_a, t_b]$ eine monotaffine Funktion, da (10.1.1) für $\beta : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ mit $\beta(t) = \frac{t-t_a}{t_b-t_a}$ für alle $t \in [t_a, t_b]$ gilt.
- b) Also gilt insbesondere, dass u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist, wenn u auf $[t_a, t_b]$ konstant ist.

10.1.4 Lemma. *Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben. Dann ist u auf $[t_a, t_b]$ im Sinne der Def. 1.1.5 monoton genau dann, wenn u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin in Sinne von Def. 10.1.1 für $X := \mathbb{R}$ ist.*

Beweis. Wenn u auf $[t_a, t_b]$ konstant ist, dann ist u monoton und auch monotaffin. Bleibt also nur der Fall zu untersuchen, dass u nicht konstant ist.

\Rightarrow : Wenn u monoton und nicht auf dem ganzen Intervall $[t_a, t_b]$ konstant ist, dann ist $u(t_a) \neq u(t_b)$, und es gilt

- Wenn $u(t_a) < u(t_b)$ ist, dann ist u monoton steigend. Also gilt für alle $t \in [t_a, t_b]$, dass $u(t_a) \leq u(t) \leq u(t_b)$ ist. Daher gibt es eine eindeutige Zahl $\beta(t) \in [0, 1]$, so dass (10.1.1) gilt. Für alle $s_1, s_2 \in [t_a, t_b]$ mit $s_1 \leq s_2$ ergibt sich aus (10.1.1), dass

$$(1 - \beta(s_1))u(t_a) + \beta(s_1)u(t_b) = u(s_1) \leq u(s_2) = (1 - \beta(s_2))u(t_a) + \beta(s_2)u(t_b). \quad (10.1.3)$$

Also gilt

$$0 \leq (\beta(s_2) - \beta(s_1)) (u(t_b) - u(t_a)).$$

Daraus folgt, dass $\beta(s_1) \leq \beta(s_2)$ ist.

Also ist $\beta : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ eine monoton steigende Funktion

- Wenn $u(t_a) > u(t_b)$ ist, dann ist u monoton fallend. Somit gilt für alle $t \in [t_a, t_b]$, dass $\beta(t_a) \geq \beta(t) \geq \beta(t_b)$ ist. Daher gibt es eine eindeutige Zahl $\beta(t) \in [0, 1]$, so dass (10.1.1) gilt. Für alle $s_1, s_2 \in [t_a, t_b]$ mit $s_1 \leq s_2$ ergibt sich aus (10.1.1), dass

$$(1 - \beta(s_1))u(t_a) + \beta(s_1)u(t_b) = u(s_1) \geq u(s_2) = (1 - \beta(s_2))u(t_a) + \beta(s_2)u(t_b). \quad (10.1.4)$$

Dies liefert

$$0 \geq (\beta(s_2) - \beta(s_1)) (u(t_b) - u(t_a)).$$

Daraus ergibt sich, dass $\beta(s_1) \leq \beta(s_2)$ ist.

Also ist $\beta : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ eine monoton steigende Funktion.

Mit dem Lemma 10.1.2 folgt jetzt, dass u monotaffin ist.

\Leftarrow : Wenn u monotaffin ist, gilt nach (10.1.1) für alle $s_1, s_2 \in [t_a, t_b]$, dass

$$u(s_2) - u(s_1) = (\beta(s_2) - \beta(s_1)) (u(t_b) - u(t_a)).$$

Nun ist $\beta(s_2) - \beta(s_1) \geq 0$, da β monoton steigend ist,

- Wenn $u(t_b) \geq u(t_a)$, folgt, dass $u(s_2) - u(s_1) \geq 0$ für alle $s_1, s_2 \in [t_a, t_b]$ mit $s_1 < s_2$ gilt. Also ist dann u monoton steigend auf $[t_a, t_b]$.
- Wenn $u(t_b) < u(t_a)$, folgt, dass $u(s_2) - u(s_1) \leq 0$ für alle $s_1, s_2 \in [t_a, t_b]$ mit $s_1 < s_2$ gilt. Also ist dann u monoton fallend auf $[t_a, t_b]$.

Also folgt, dass u auf $[t_a, t_b]$ monoton ist. \square

10.1.5 Lemma. *Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben, so dass u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin und $u(t_a) \neq u(t_b)$ ist.*

Dann gibt es eine eindeutig definierte Abbildung $\beta : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$, so dass (10.1.1) gilt.

Beweis. Es sei eine Funktion $\beta : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ gegeben, so dass (10.1.1) gilt, und es sei eine Funktion $\gamma : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ gegeben, so dass (10.1.1) mit β ersetzt durch γ gilt. Bildet man dann für $t \in [t_a, t_b]$ die Differenz der beiden Versionen von (10.1.1), so folgt dass

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - \beta(t))u(t_a) + \beta(t)u(t_b) - ((1 - \gamma(t))u(t_a) + \gamma(t)u(t_b)) \\ &= (\beta(t) - \gamma(t))(u(t_b) - u(t_a)). \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

Da $u(t_b) \neq u(t_a)$ ist, erhält man, dass $\beta(t) = \gamma(t)$ sein muss. \square

10.1.6 Definition. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben, so dass u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist. Dann ist die *Parametrisierung von u auf $[t_a, t_b]$*

$$\text{Para}_{[t_a, t_b]}[u] : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$$

folgendermassen definiert:

- Ist $u(t_a) \neq u(t_b)$, dann ist $\text{Para}_{[t_a, t_b]}[u] := \beta$, wobei $\beta : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ die nach Lemma 10.1.5 eindeutig definierte Funktion mit (10.1.1) ist.
- Ist $u(t_a) = u(t_b)$, dann gilt

$$\text{Para}_{[t_a, t_b]}[u](t) := \beta(t) = \frac{t - t_a}{t_b - t_a}. \quad (10.1.6)$$

10.1.7 Lemma. *Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben, so dass u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist.*

- Die Parametrisierung $\text{Para}_{[t_a, t_b]}[u] : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ ist monoton steigend, und es gilt $\text{Para}_{[t_a, t_b]}[u](t_a) = 0$, $\text{Para}_{[t_a, t_b]}[u](t_b) = 1$ und

$$u(t) = (1 - \text{Para}_{[t_a, t_b]}[u](t))u(t_a) + \text{Para}_{[t_a, t_b]}[u](t)u(t_b), \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (10.1.7)$$

- Wenn X ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_X$ ist, dann gilt für alle $t \in [t_a, t_b]$

$$\text{Para}_{[t_a, t_b]}[u](t) \|u(t_b) - u(t_a)\|_X = \|u(t) - u(t_a)\|_X. \quad (10.1.8)$$

10. Stückweise monotaffine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings

- c) Wenn X ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_X$ ist, und $u(t_a) \neq u(t_b)$ ist, dann gilt für alle $t \in [t_a, t_b]$

$$\text{Para}_{[t_a, t_b]}[u](t) = \frac{\|u(t) - u(t_a)\|_X}{\|u(t_b) - u(t_a)\|_X}. \quad (10.1.9)$$

Beweis. a) Folgt unmittelbar aus der Definition.

- b) Aus (10.1.7) folgt für alle $t \in [t_a, t_b]$

$$u(t) - u(t_a) = \text{Para}_{[t_a, t_b]}[u](t)(u(t_b) - u(t_a)). \quad (10.1.10)$$

Dies liefert (10.1.8).

- c) Aus (10.1.8) folgt (10.1.9) unmittelbar. □

10.1.8 Lemma. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben, und es sei vorausgesetzt, dass u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist.

- a) Es gilt

$$u([t_a, t_b]) \subseteq \text{conv}(u(t_a), u(t_b)) \quad (10.1.11)$$

mit $\text{conv}(\cdot, \cdot)$ wie in Def. 1.1.16.

- b) Für alle $s_1, s_2 \in [t_a, t_b]$ mit $s_1 < s_2$ ist u auf $[s_1, s_2]$ eine monotaffine Funktion.

Beweis. Es sei $\beta := \text{Para}_{[t_a, t_b]}[u]$. Dann gilt (10.1.1).

- a) Aus (10.1.1) folgt unmittelbar, dass $u(t) \in \text{conv}(u(t_a), u(t_b))$ für alle $t \in [t_a, t_b]$.

- b)
 - Wenn $\beta(s_1) = \beta(s_2)$ ist, dann gilt wegen der Monotonie von β , dass β auf $[s_1, s_2]$ konstant ist. Wegen (10.1.1) gilt dies dann auch für u . Es folgt dann mit Bemerkung 10.1.3, dass u auf $[s_1, s_2]$ monotaffin ist.
 - Wenn $\beta(s_1) \neq \beta(s_2)$ ist, dann gilt, da β monoton steigend ist, dass $\beta(s_1) < \beta(s_2)$ ist. Sei jetzt $\gamma : [s_1, s_2] \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$\gamma(t) := \frac{\beta(t) - \beta(s_1)}{\beta(s_2) - \beta(s_1)}, \quad \forall t \in [s_1, s_2]. \quad (10.1.12)$$

Dann ist γ eine monotone Funktion mit $\gamma(s_1) = 0$, $\gamma(s_2) = 1$ und es gilt für alle $t \in [s_1, s_2]$

$$\begin{aligned} & (1 - \gamma(t))u(s_1) + \gamma(t)u(s_2) \\ &= (1 - \gamma(t))((1 - \beta(s_1))u(t_a) + \beta(s_1)u(t_b)) + \gamma(t)((1 - \beta(s_2))u(t_a) + \beta(s_2)u(t_b)) \\ &= ((1 - \gamma(t))(1 - \beta(s_1)) + \gamma(t)(1 - \beta(s_2)))u(t_a) \\ & \quad + ((1 - \gamma(t))\beta(s_1) + \gamma(t)\beta(s_2))u(t_b) \\ &= (1 - \beta(s_1) - \gamma(t)(\beta(s_2) - \beta(s_1)))u(t_a) + (\beta(s_1) + \gamma(t)(\beta(s_2) - \beta(s_1)))u(t_b) \\ &= (1 - \beta(t))u(t_a) + \beta(t)u(t_b) = u(t). \end{aligned} \quad (10.1.13)$$

Dies zeigt, dass u auf $[s_1, s_2]$ monotaffin ist. □

10.1.9 Lemma. *Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *u ist auf $[t_a, t_b]$ monotaffin.*

ii) *Es gilt für alle $s_1, s_2 \in [t_a, t_b]$ mit $s_1 < s_2$*

$$u([s_1, s_2]) \subseteq \text{conv}(u(s_1), u(s_2)). \quad (10.1.14)$$

iii) *Es gilt für alle $s_2 \in]t_a, T]$*

$$u([t_a, s_2]) \subseteq \text{conv}(u(t_a), u(s_2)). \quad (10.1.15)$$

Beweis. i) \implies ii): Wenn u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist, dann gilt für alle $s_1, s_2 \in [t_a, t_b]$ mit $s_1 < s_2$ nach der Aussage b) im Lemma 10.1.8, dass u auf $[s_1, s_2]$ monotaffin ist. Dann liefert die Aussage a) im Lemma 10.1.8 die Inklusion in (10.1.14)

ii) \implies iii): Die Aussage iii) folgt aus der in ii) mit $s_1 := t_a$.

iii) \implies i): Es sei die Aussage iii) erfüllt.

- Wenn $u(t_a) = u(t_b)$ ist, dann liefert (10.1.15), dass $u([t_a, s_2]) \subseteq \{u(t_a)\}$. Also ist u auf $[t_a, t_b]$ konstant und damit, nach Bemerkung 10.1.3, eine monotaffine Funktion auf $[t_a, t_b]$.
- Für jedes $t \in [t_a, t_b]$ ist $u(t) \in \text{conv}(u(t_a), u(t_b))$. Da $u(t_a) \neq u(t_b)$ ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes $\beta(t) \in [0, 1]$ mit (10.1.1).

Für $s_1, s_2 \in (t_a, t_b)$ mit $s_1 \leq s_2$ ist $u(s_1) \in \text{conv}(u(t_a), u(s_2))$. Es gibt also ein $r \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} u(s_1) &= (1 - r)u(t_a) + ru(s_2) \\ &= (1 - r\beta(s_2))u(t_a) + r\beta(s_2)u(t_b). \end{aligned} \quad (10.1.16)$$

Subtrahiert man jetzt von beiden Seiten dieser Gleichung (10.1.1) mit $t := s_1$ dann folgt

$$0 = (r\beta(s_2) - \beta(s_1))(u(t_b) - u(t_a)). \quad (10.1.17)$$

Daraus folgt, dass $\beta(s_1) = r\beta(s_2) \leq \beta(s_2)$ ist. Somit ist β monoton. Mit dem Lemma 10.1.2 folgt, dass u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin.

□

10.1.10 Lemma. *Es seien $t_a, t_b, t_c \in [0, T]$ mit $t_a < t_b < t_c$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *u ist auf $[t_a, t_c]$ monotaffin.*

ii) *u ist auf $[t_a, t_b]$ und auf $[t_b, t_c]$ monotaffin, und es gilt $u(t_b) \in \text{conv}(u(t_a), u(t_c))$.*

Beweis. i) \implies ii): Wenn u auf $[t_a, t_c]$ monotaffin ist, dann folgen die Aussagen in ii) unmittelbar mit dem Lemma 10.1.8.

ii) \implies i): Es sei ii) erfüllt.

Da $u(t_b) \in \text{conv}(u(t_a), u(t_c))$, gibt es ein $\lambda \in [0, 1]$, so dass

$$u(t_b) = (1 - \lambda)u(t_a) + \lambda u(t_c). \quad (10.1.18)$$

Da u auf $[t_a, t_b]$ und auf $[t_b, t_c]$ monotaffin ist, gibt es monoton steigende Funktionen $\beta_a : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ und $\beta_b : [t_b, t_c] \rightarrow [0, 1]$ so dass

$$\beta_a(t_a) = 0, \quad \beta_a(t_b) = 1, \quad \beta_b(t_b) = 0, \quad \beta_b(t_c) = 1, \quad (10.1.19)$$

$$u(t) = (1 - \beta_a(t))u(t_a) + \beta_a(t)u(t_b), \quad \forall t \in [t_a, t_b], \quad (10.1.20)$$

$$u(t) = (1 - \beta_b(t))u(t_b) + \beta_b(t)u(t_c), \quad \forall t \in [t_b, t_c]. \quad (10.1.21)$$

Definiert man jetzt $\gamma : [t_a, t_c] \rightarrow [0, 1]$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} \lambda\beta_a(t), & \text{wenn } t \leq t_b, \\ \lambda + \beta_b(t)(1 - \lambda), & \text{wenn } t \geq t_b, \end{cases} \quad (10.1.22)$$

dann ist dies eine wohldefinierte, monoton steigende Funktion mit $\gamma(t_a) = 0$ und $\gamma(t_c) = 1$. Kombiniert man diese Definition und (10.1.18)–(10.1.21), dann folgt für alle $t \in [t_a, t_b]$ und alle $s \in [t_b, t_c]$:

$$\begin{aligned} u(t) &= (1 - \beta_a(t))u(t_a) + \beta_a(t)((1 - \lambda)u(t_a) + \lambda u(t_c)) \\ &= (1 - \lambda\beta_a(t))u(t_a) + \lambda\beta_a(t)u(t_c) = (1 - \gamma(t))u(t_a) + \gamma(t)u(t_c), \end{aligned} \quad (10.1.23)$$

$$\begin{aligned} u(s) &= (1 - \beta_b(s))((1 - \lambda)u(t_a) + \lambda u(t_c)) + \beta_b(s)u(t_c) \\ &= (1 - \lambda - \beta_b(s)(1 - \lambda))u(t_a) + ((1 - \beta_b(s))\lambda + \beta_b(s))u(t_c) \\ &= (1 - \gamma(s))u(t_a) + \gamma(s)u(t_c). \end{aligned} \quad (10.1.24)$$

Damit ist bewiesen, dass u auf $[t_a, t_c]$ monotaffin ist. \square

10.1.11 Korollar. Es seien $t_a, t_b, t_c, t_d \in [0, T]$ mit $t_a < t_b < t_c < t_d$ gegeben, so dass $u(t_b) \neq u(t_c)$ ist, u auf $[t_a, t_c]$ und auf $[t_b, t_d]$ monotaffin ist. Dann folgt, dass u auf $[t_a, t_d]$ monotaffin ist.

Beweis. Da u auf $[t_a, t_c]$ und $[t_b, t_d]$ monotaffin ist, $t_b \in [t_a, t_c]$ und $t_c \in [t_b, t_d]$ liefert das Lemma 10.1.8, dass $u(t_b) \in \text{conv}(u(t_a), u(t_c))$ und $u(t_c) \in \text{conv}(u(t_b), u(t_d))$ und dass u auf $[t_c, t_d]$ monotaffin ist. Somit sind $(u(t_a), u(t_b), u(t_c))$ und $(u(t_b), u(t_c), u(t_d))$ Konvexitätstripel. Wendet man jetzt Lem. 7.2.3.c) für $(u(t_a), u(t_b), u(t_c), u(t_d))$ an, dann folgt, dass $(u(t_a), u(t_c), u(t_d))$ ein Konvexitätstripel ist. Da u auf $[t_a, t_c]$ und $[t_c, t_d]$ monotaffin ist, erhält man mit dem Lem. 10.1.10, dass u auf $[t_a, t_d]$ monotaffin ist. \square

10.1.12 Korollar. Es seien $t_a, t_b, t_c, t_d \in [0, T]$ mit $t_a < t_b < t_c \leq t_d$ gegeben, so dass $u(t_b) \notin \text{conv}(u(t_a), u(t_d))$.

- a) Wenn u auf $[t_a, t_b]$ und auf $[t_b, t_d]$ monotaffin ist, und $u(t_b) \neq u(t_c)$ ist, dann folgt dass u auf $[t_a, t_c]$ nicht monotaffin ist.
- b) Wenn u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist und u auf $[t_b, t_d]$ affin ist, dann folgt dass u auf $[t_a, t_c]$ nicht monotaffin ist.

Beweis. a) Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass u auf $[t_a, t_c]$ monotaffin ist. Dann liefert Kor. 10.1.11, dass u auf $[t_a, t_d]$ monotaffin ist. Mit dem Lem. 10.1.8 erhalten wir, dass $u(t_b) \in \text{conv}(u(t_a), u(t_d))$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

- b) Wenn $u(t_c) = u(t_b)$ wäre, dann müsste, da $t_b < t_c$ und u auf $[t_b, t_d]$ affin ist, u auf $[t_b, t_d]$ konstant sein, und somit $u(t_b) = u(t_d) \in \text{conv}(u(t_a), u(t_d))$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also ist $u(t_b) \neq u(t_d)$ und mit a) erhält man, dass u auf $[t_a, t_c]$ nicht monotaffin ist.

□

10.1.13 Lemma. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben, und es sei eine Funktion $u : [t_a, t_b] \rightarrow X$ gegeben. Es seien $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ mit $s_1 < s_2$ gegeben, und es sei eine monoton steigende Funktion $\alpha : [s_1, s_2] \rightarrow [t_a, t_b]$ mit $\alpha(s_1) < \alpha(s_2)$ gegeben. Dann gilt:

- a) Wenn u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist, dann ist $u \circ \alpha$ auf $[s_1, s_2]$ monotaffin.
- b) Wenn $\alpha([s_1, s_2]) = [\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$ ist und $u \circ \alpha$ auf $[s_1, s_2]$ monotaffin ist, dann ist u auf $[\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$ monotaffin.
- c) Wenn α stetig ist und $u \circ \alpha$ auf $[s_1, s_2]$ monotaffin ist, dann ist u auf $[\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$ monotaffin.
- d) Wenn α stetig ist, $\alpha(s_1) = t_a$ und $\alpha(s_2) = t_b$, dann gilt:
 u ist auf $[t_a, t_b]$ genau dann monotaffin, wenn $u \circ \alpha$ auf $[s_1, s_2]$ monotaffin ist.

Beweis. a) Es sei u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin. Nach Lemma 10.1.8 ist dann u auf $[\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$ eine monotaffine Funktion.

Dann ist $\beta := \text{Para}_{[\alpha(s_1), \alpha(s_2)]}[u] : [\alpha(s_1), \alpha(s_2)] \rightarrow [0, 1]$ eine monoton steigende Funktion, so dass $\beta(\alpha(s_1)) = 0$, $\beta(\alpha(s_2)) = 1$ und (10.1.1) mit t_a ersetzt durch $\alpha(s_1)$ und t_b ersetzt durch $\alpha(s_2)$ gilt. Dann ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} u \circ \alpha(t) &= u(\alpha(t)) = (1 - \beta(\alpha(t)))u(\alpha(s_1)) + \beta(\alpha(t))u(\alpha(s_2)), \\ &= (1 - \beta \circ \alpha(t))u \circ \alpha(s_1) + \beta \circ \alpha(t)u(\alpha(s_2)), \quad \forall t \in [s_1, s_2]. \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

Da außerdem $\beta \circ \alpha(s_1) = \beta(t_a) = 0$ und $\beta \circ \alpha(s_2) = \beta(t_b) = 1$ ist, folgt, dass $u \circ \alpha$ auf $[s_1, s_2]$ monotaffin ist.

10. Stückweise monotaffine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings

- b) Es sei $\alpha([s_1, s_2]) = [\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$ und $u \circ \alpha$ monotaffin. Also ist $\gamma := \text{Para}_{[s_1, s_2]}[u \circ \alpha] : [s_1, s_2] \rightarrow [0, 1]$ eine monoton steigende Funktion mit $\gamma(s_1) = 0$, $\gamma(s_2) = 1$ und

$$\begin{aligned} u \circ \alpha(s) &= (1 - \gamma(s))u \circ \alpha(s_1) + \gamma(s)u \circ \alpha(s_2) \\ &= (1 - \gamma(s))u(\alpha(s_1)) + \gamma(s)u(\alpha(s_2)), \quad \forall s \in [s_1, s_2]. \end{aligned} \quad (10.1.26)$$

Sei nun $\alpha^{-1} : [t_a, t_b] \rightarrow [s_1, s_2]$ definiert durch

$$\alpha^{-1}(t) := \frac{1}{2} (\sup S(t) + \inf S(t)), \quad \text{mit} \quad S(t) := \{r \in [s_1, s_2] \mid \alpha(r) = t\}. \quad (10.1.27)$$

Dann ist α^{-1} wohldefiniert.

- Für $t \in [\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$, so dass $S(t)$ nur aus einem Element besteht, folgt sofort, dass $\alpha(\alpha^{-1}(t)) = t$ ist.
- Für $t \in [\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$, so dass $S(t)$ aus mehr als einem Element besteht, gibt es $s_1^*, s_2^* \in S(t)$ mit $s_1^* < \alpha^{-1}(t) < s_2^*$. Da α monoton steigend ist, erhält man $t = \alpha(s_1^*) \leq \alpha(\alpha^{-1}(t)) \leq \alpha(s_2^*) = t$.

Es gilt also

$$\alpha(\alpha^{-1}(t)) = t, \quad \forall t \in [\alpha(s_1), \alpha(s_2)]. \quad (10.1.28)$$

Für $t, t' \in [t_a, t_b]$, so dass $t < t'$ ist, gilt für alle $s \in S(t)$ und $s' \in S(t')$, dass $\alpha(s) < \alpha(s')$. Somit muss dann, da α monoton steigend ist, $s < s'$ sein. Also folgt, dass $\alpha^{-1}(t) \leq \alpha^{-1}(t')$ ist.

Daher ist α^{-1} eine monotone Funktion und es gilt (10.1.28). Dies führt zu

$$u(t) = u(\alpha(\alpha^{-1}(t))) = (1 - \gamma(\alpha^{-1}(t)))u(\alpha(s_1)) + \gamma(\alpha^{-1}(t))u(\alpha(s_2)), \quad (10.1.29)$$

für alle $t \in [\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$. Da $\gamma \circ \alpha^{-1}$ monoton steigend ist, folgt nun mit Lem. 10.1.2, dass u auf $[\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$ monotaffin ist.

- c) Es sei α stetig und $u \circ \alpha$ monotaffin. Da α monoton steigend und stetig ist, folgt dass $\alpha([s_1, s_2]) = [\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$ ist. Dann folgt mit b), dass u auf $[\alpha(s_1), \alpha(s_2)]$ monotaffin ist.
- d) Kombiniert man die Aussagen a) und c), dann folgt die gewünschte „genau dann, wenn“ Aussage.

□

10.2. Stückweise monotaffine Funktionen und Monotaffinitäts-Zerlegungen

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest, und es sei X ein topologischer Vektorraum. Mit der folgenden Definition wird die Notation von stückweise monotonen Funktionen wie in Def. 1.1.10 auf monotaffine Funktionen übertragen.

10.2.1 Definition. Es sei eine Abbildung $u : [0, T] \rightarrow X$ gegeben.

- a) Es seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gegeben. Man sagt, dass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine *Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u* ist, wenn für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass u auf $[t_{i-1}, t_i]$ eine monotaffine Funktion ist.
- b) Wenn es eine Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ für u gibt, dann sagt man dass u *stückweise monotaffin* (PIECEWISE MONOTAFFINE, kurz PW.MO.AF.) ist.

10.2.2 Definition. a) Es sei $\text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ die Menge aller stückweise monotaffinen Funktionen von $[0, T]$ nach X , d. h.

$$\text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) := \{u : [0, T] \rightarrow X \mid u \text{ ist stückweise monotaffin}\}. \quad (10.2.1)$$

- b) Es ist $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ die Menge der stetigen, stückweise monotaffinen Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$, d. h.

$$C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) := \{u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \mid u \text{ ist stetig}\}. \quad (10.2.2)$$

- c) Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Dann ist

$$\text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) := \text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \cap \text{Map}([0, T], X_1) \quad (10.2.3)$$

die Menge der stückweise monotaffinen Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$ mit $u([0, T]) \subseteq X_1$.

- d) Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Dann ist

$$C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) := C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \cap \text{Map}([0, T], X_1) \quad (10.2.4)$$

die Menge der stetigen, stückweise monotaffinen Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$ mit $u([0, T]) \subseteq X_1$.

10.2.3 Bemerkung. Die stückweise monotaffinen Funktionen im Sinne der Def. 10.2.2 für $X = \mathbb{R}$ sind gerade die stückweise monotonen Funktionen im Sinne der Def. 1.1.10. Die stetigen, stückweise monotaffinen Funktionen im Sinne der Def. 10.2.2 für $X = \mathbb{R}$ sind gerade die stetigen, stückweise monotonen Funktionen im Sinne der Def. 1.1.10. Also gilt

$$\text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; \mathbb{R}) = \text{Map}_{\text{pm}}[0, T], \quad C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; \mathbb{R}) = C_{\text{pm}}[0, T]. \quad (10.2.5)$$

10.2.4 Bemerkung. Es sei $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Dann ist u eine stetige, stückweise monotaffine Funktion, und jede Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u ist eine Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

10.2.5 Lemma. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ gegeben und es sei eine Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben. Dann ist jede Verfeinerung dieser Zerlegung wiederum eine Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Def. 10.2.1 und Lemma 10.1.8. □

Übertragung von Def. 5.1.2 liefert:

10.2.6 Definition. a) Es sei eine Abbildung $u : [0, T] \rightarrow X$ gegeben. Man sagt, dass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine *Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u* , (STANDARD MONOTAFFINICITY DECOMPOSITION, kurz ST.MO.AF.DE.) ist, wenn für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass

$$t_i = \max\{s \in [t_{i-1}, T] \mid u \text{ ist monotaffin auf } [t_i, s]\}. \quad (10.2.6)$$

b) Es sei $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ die Menge aller Abbildungen von $[0, T]$ nach X , für die eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung existiert, d. h.

$$\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X) := \{u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \mid \exists 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T : \forall i = 1, \dots, n : (10.2.6) \text{ gilt}\}. \quad (10.2.7)$$

c) Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Es sei $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ die Menge aller Abbildungen von $[0, T]$ nach X_1 , für die eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung existiert, d. h.

$$\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1) := \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X) \cap \text{Map}([0, T], X_1). \quad (10.2.8)$$

10.2.7 Bemerkung. Eine Abbildung von $[0, T]$ nach \mathbb{R} hat genau dann eine Standard-Monotonie-Zerlegung im Sinne der Def. 5.1.2, wenn sie eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung im Sinne der obigen Definition für $X = \mathbb{R}$ hat, d. h.

$$\text{Map}_{\exists \text{s.m.d.}}[0, T] = \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; \mathbb{R}). \quad (10.2.9)$$

10.2.8 Lemma. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Wenn es eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u gibt, dann ist diese eindeutig bestimmt.

Beweis. Es seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ und $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = T$ zwei Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u . Dann ist $t_0 = 0 = s_0$ und per Induktion über i folgt, dass $t_i \leq s_i \leq t_i$ und somit $t_i = s_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Also ist $t_n = s_n = T$ und damit $n = m$. \square

10.2.9 Lemma. Es seien $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ und eine Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben. Wenn man $s_0 = 0$, $i := 0$, und $m_0 = 0$ setzt, und dann die Schritte

$$\begin{aligned} i &:= i + 1, \quad m_i := \max\{k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, n\} \mid u \text{ ist auf } [s_{i-1}, t_k] \\ &\quad \text{monotaffin}\}, \\ s_i &:= \begin{cases} T, & \text{wenn } m_i = n, \\ \sup\{t \in [t_{m_i}, t_{m_i+1}] \mid u(t_{m_i}) = u(t)\}, \end{cases} \end{aligned} \quad (10.2.10)$$

wiederholt bis $m_i = n$ ist, dann gilt:

- Wenn für alle $k = 1, \dots, i$ gilt, dass $u(s_k) = u(t_{m_k})$ ist, dann ist $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_i = T$ eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u .

- *Andernfalls gibt es keine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u .*

Beweis. • Es gelte für alle $k = 1, \dots, m_i$, dass $u(s_k) = u(t_{m_k})$ ist.

Für alle $j = 1, \dots, m_i$ gilt dann: Die Definition vom m_j liefert, dass u auf $[s_{j-1}, t_{m_j}]$ monotaffin ist.

- Wenn $s_j = t_{m_j}$, dann folgt somit, dass u auf $[s_{j-1}, s_j]$ monotaffin ist.
- Wenn $s_j > t_{m_j}$, dann ist u auf $[t_{m_j}, s_j]$ konstant, und damit monotaffin und stetig. Weiterhin ist $u(t_{m_j}) = u(s_j) \in \text{conv}(u(s_{j-1}), u(s_j))$, so, dass das Lemma 10.1.10 liefert, dass u auf $[s_{j-1}, s_j]$ monotaffin ist.

Somit ist gezeigt, dass u auf $[s_{j-1}, s_j]$ monotaffin ist.

- Wenn $T = s_j$ ist, dann folgt, dass

$$s_j = \max\{s \in]s_{j-1}, T] \mid u \text{ ist auf } [s_{j-1}, s] \text{ monotaffin}\}. \quad (10.2.11)$$

- Wenn $T > s_j$ ist, dann ist $t_{m_{j+1}} > s_j$, weil u auf $[s_{j-1}, s_j]$ monotaffin, aber auf $[s_{j-1}, t_{m_{j+1}}]$ nicht.

Dann gilt für all $t \in]s_j, t_{m_{j+1}}]$, dass es ein $\tau \in]s_j, t]$ gibt, so dass $u(\tau) \neq u(s_j)$ ist. Wenn u auf $[s_{j-1}, t]$ monotaffin wäre, dann wäre u nach dem Lem. 10.1.8 auch auf $[s_{j-1}, \tau]$ monotaffin. Da $s_i \in [t_{m_i}, t_{m_{i+1}}[$ ist und u auf $[t_{m_i}, t_{m_{i+1}}]$ monotaffin ist, folgt, wieder mit dem Lem. 10.1.8, dass u auf $[s_i, t_{m_{i+1}}]$ monotaffin ist.

Nach dem Lemma 10.1.11 müsste dann u auch auf $[s_{j-1}, t_{m_{j+1}}]$ monotaffin sein, was ein Widerspruch zur Konstruktion wäre. Somit gilt (10.2.11).

Dies zeigt, dass $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{m_i} = T$ eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u ist.

- Es gebe mindestens ein $k \in \{1, \dots, i\}$, so dass $u(s_k) \neq u(t_{m_k})$ ist. Es sei O.B.d.A. k minimal mit dieser Eigenschaft. Dann kann man für $j = 1, \dots, k-1$ die obige Argumentation anwenden, und erhält, dass (10.2.11) gilt. Weiterhin folgt mit der Definition von s_k gemäß (10.2.10), dass $m_k \neq n$, und $t_{m_k} < s_k \leq T$ ist.

Um zu zeigen, dass es keine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u gibt, nehmen wir an, dass es eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = s'_0 < \dots < s'_{n'} = T$ von $[0, T]$ für u gibt.

Da für $j = 1, \dots, k-1$ (10.2.11) gilt, kann man die Argumentation aus Lemma 10.2.8 anwenden, und erhält, dass $n' \geq k$, $s'_{k-1} = s_{k-1}$ und

$$s'_k = \max\{s \in]s_{k-1}, T] \mid u \text{ ist auf } [s_{k-1}, s] \text{ monotaffin}\}. \quad (10.2.12)$$

Es gilt für alle $t \in [t_{m_k}, s_k[$, dass u auf $[t_{m_k}, t]$ konstant und damit monotaffin ist. Dann ist $u(t_{m_k}) = u(t) \in \text{conv}(u(s_{k-1}), u(t))$ und das Lemma 10.1.10 liefert dass u auf $[s_{k-1}, t]$ monotaffin ist, und damit, nach (10.2.12) und der Definition vom m_k , $t \leq s'_k$ und $t < t_{m_{k+1}}$.

Daraus folgt, dass $s'_k \geq s_k$ und $t_{m_{k+1}} \geq s_k$ sein muss. Nun liefert (10.2.12), dass u auf $[s_{k-1}, s_k]$ monotaffin sein muss.

10. Stückweise monotaffine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings

- Wenn $s_k = t_{m_k+1}$ ist, folgt, dass u auf $[s_k, t_{m_k+1}]$ monotaffin ist, was ein Widerspruch zur Definition von m_k ist.
- Wenn $s_k < t_{m_k+1}$ dann folgt, da u auf $[s_{k-1}, s_k]$ und auf $[t_{m_k}, t_{m_k+1}]$ monotaffin ist, $t_{m_k} \leq s_k < t_{m_k+1}$ und $u(t_{m_k}) \neq u(s_k)$, mit dem Korollar 10.1.11, dass u auf $[s_k, t_{m_k+1}]$ monotaffin ist, was ein Widerspruch zur Definition von m_k ist.

□

Aus dem Lemma 10.2.9 ergeben sich die drei folgenden Korollare sofort:

10.2.10 Korollar. Für jede stetige, stückweise monotaffine Funktion existiert eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u , d. h. es gilt

$$C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \subset \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X). \quad (10.2.13)$$

10.2.11 Korollar. Es seien $u, v \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ und $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u bzw. v . Es gilt für alle $k = 1, \dots, n$ und alle $t^* \in]t_{k-1}, t_k]$:

Wenn $u(s) = v(s) \quad \forall s \in [0, t^*]$, dann gilt:

$$m \geq k, t^* \in]s_{k-1}, s_k], \quad \text{und} \quad s_i = t_i \quad \forall i = 0, \dots, k-1.$$

10.2.12 Korollar. Es seien $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u . Dann gilt

$$u(t_i) \neq u(t), \quad \forall t \in]t_i, t_{i+1}], \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$$

10.2.13 Lemma. Es sei $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$, und es sei $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ eine zulässige Zeittransformation

a) Es ist $u \circ \alpha \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$.

b) Es sei die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ für u gegeben. Es sei $s_0, \dots, s_n \in [0, T]$ definiert durch $s_0 = 0$ und

$$s_i := \max \{s \in [0, t] \mid \alpha(s) = t_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (10.2.14)$$

Dann ist $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für $u \circ \alpha$.

Beweis. Es ist $s_0 = 0 = \alpha(t_0)$. Jetzt wird für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gezeigt, dass

$$s_i := \max \{s \in]s_{i-1}, T \mid u \circ \alpha \text{ ist auf } [s_{i-1}, s] \text{ monotaffin}\}. \quad (10.2.15)$$

Für alle $s \in]s_{i-1}, T]$ gilt, dass $\alpha(s_{i-1}) = t_{i-1} < \alpha(s) \leq T$. Da außerdem α als zulässige Zeittransformation von $[0, T]$ stetig ist, folgt dass

$$\alpha|_{[s_{i-1}, s]}([s_{i-1}, s]) = \alpha([s_{i-1}, s]) = [t_{i-1}, \alpha(s)]. \quad (10.2.16)$$

Daher ergibt sich mit dem Lemma 10.1.13, dass u genau dann auf $[t_{i-1}, \alpha(s)]$ monotaffin ist, wenn $u \circ \alpha$ auf $[s_{i-1}, s]$ monotaffin ist.

Da $\alpha(s_i) = t_i$ ist, und u auf $[t_{i-1}, t_i]$ monotaffin ist, folgt dass $u \circ \alpha$ auf $[s_{i-1}, s_i]$ monotaffin ist. Für alle $s \in]s_i, T]$ ist $\alpha(s) > t_i$, und somit ergibt sich mit (10.2.6), dass u auf $[t_i, \alpha(s)]$ nicht monotaffin ist, und damit $u \circ \alpha$ auf $[s_{i-1}, s]$ nicht monotaffin ist.

Somit gilt (10.2.15). □

10.2.14 Lemma. *Es sei $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ gegeben, und es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u . Es seien $k \in \{1, \dots, n\}$ und $s \in]t_{k-1}, t_k]$ gegeben.*

i) *Wenn $u(s) \neq u(t_k)$ und $k < n$, dann ist*

$$0 =: s_0 < s_1 := t_k - s < \dots < s_{n-k} := t_{n-1} - s < s_{n-k+1} := T$$

die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich $\mathcal{M}_s[u]$.

ii) *Wenn $u(s) = u(t_k)$ und $k < n - 1$, dann ist*

$$0 =: s_0 < s_1 := t_{k+1} - s < \dots < s_{n-k-1} := t_{n-1} - s < s_{n-k} := T$$

die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich $\mathcal{M}_s[u]$.

iii) *Wenn $u(s) = u(t_k)$ und $k = n - 1$, dann ist*

$$0 =: s_0 < s_1 := T$$

die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich $\mathcal{M}_s[u]$.

iv) *Ist $k = n$, dann ist*

$$0 =: s_0 < s_1 := T$$

die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich $\mathcal{M}_s[u]$.

Beweis. Im Fall iii) und iv) folgt sofort, dass u auf $[s, T]$ monotaffin ist, und damit $\mathcal{M}_s[u]$ auf $[0, T]$ monotaffin ist, woraus sich sofort die Aussage ergibt.

In den Fällen i) und ii) folgt sofort, dass für $i = 1, \dots, n - k$ $\mathcal{M}_s[u]$ auf $[t_{k+i-1} - s, t_{k+i} - s]$ monotaffin ist, und

$$\begin{aligned} & \max\{t \in]t_{k+i-1} - s, T] : \mathcal{M}_s[u] \text{ ist auf } [t_{k+i-1} - s, t] \text{ monotaffin}\} \\ &= \max\{t \in]t_{k+i-1} - s, T] : u \text{ ist auf } [t_{k+i-1}, \min\{t + s, T\}] \text{ monotaffin}\} \\ &= \begin{cases} t_{k+i} - s, & \text{wenn } k + i < n \text{ ist,} \\ T & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Im Fall i) folgt außerdem dass u auf $[s, t_k]$ monotaffin ist, aber für alle $r \in]t_k, T]$ gilt: u ist auf $[s, r]$ nicht monotaffin. Also ist $\mathcal{M}_s[u]$ auf $[0, t_k - s]$ monotaffin, aber für alle $r \in]t_k - s, T]$ gilt: $\mathcal{M}_s[u]$ ist auf $[0, r]$ nicht monotaffin.

Im Fall ii) ist u auf $[s, t_{k+1}]$ monotaffin, aber für alle $r \in]t_{k+1}, T]$ gilt: u ist auf $[s, r]$ nicht monotaffin. Also ist $\mathcal{M}_s[u]$ auf $[0, t_{k+1} - s]$ monotaffin, aber für $r \in]t_{k+1} - s, T]$ gilt: $\mathcal{M}_s[u]$ ist auf $[0, t_{k+1} - s]$ nicht monotaffin.

In beiden Fällen folgt daraus die präsentierte Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung. □

10.3. Verbindung zwischen stückweise monotaffinen Funktionen und Strings

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest, und es sei X ein topologischer Vektorraum.

10.3.1 Lemma. *Es sei $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u . Dann gilt*

$$(u(t_0), u(t)) \in S_F(X), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (10.3.1a)$$

$$(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{i-1}), u(t)) \in S_F(X), \quad \forall t \in]t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \dots, n. \quad (10.3.1b)$$

Beweis. Aus Def. 7.3.2 folgt sofort, dass $X \times X \subset S_F(X)$, und somit die erste Aussage gilt. Um die zweite Aussage mit einem Widerspruchsbeweis zu zeigen, nehmen wir an, dass sie nicht gilt.

Nehmen wir also an, dass es ein $i \in \{2, \dots, n\}$ und ein $t \in]t_{i-1}, t_i]$ gibt, so dass

$$(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{i-1}), u(t)) \notin S_F(X). \quad (10.3.2)$$

Man kann o.B.d.A. annehmen, dass i minimal ist.

Wenn $i = 2$ ist, dann folgt aus (10.3.1a), dass $(u(t_0), u(t_{i-1}))$ in $S_F(X)$ liegt. Wenn $i > 2$ ist, dann folgt aus der Minimalität von i , dass $(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{i-1}))$ in $S_F(X)$ liegt. Also gilt für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k < i - 1$, dass $(u(t_{k-1}), u(t_k), u(t_{k+1}))$ kein Konvexitätstripel ist. Da aber (10.3.2) gilt, ergibt sich, dass $(u(t_{i-2}), u(t_{i-1}), u(t))$ ein Konvexitätstripel sein muss.

Da u auf $[t_{i-1}, t_i]$ monotaffin ist, folgt mit dem Lem. 10.1.8, dass u auf $[t_{i-1}, t]$ monotaffin ist. Da u auf $[t_{i-2}, t_{i-1}]$ monotaffin ist, und $u(t_{i-1}) \in \text{conv}(u(t_{i-2}), u(t))$ ist, liefert das Lemma 10.1.9, dass u auf $[t_{i-2}, t]$ monotaffin ist. Da $t > t_{i-1}$ ist, ist dies ein Widerspruch dazu, dass, nach der Definition der Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung, t_{i-1} das maximale $t' \in]t_{i-2}, T]$ ist, so dass u auf $[t_{i-2}, t']$ monotaffin ist. \square

Aus dem Lemma folgt sofort

10.3.2 Korollar. *Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Es sei $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u . Dann gilt*

$$(u(t_0), u(t)) \in S_F(X_1), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (10.3.3a)$$

$$(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{i-1}), u(t)) \in S_F(X_1), \quad \forall t \in]t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \dots, n. \quad (10.3.3b)$$

10.3.3 Lemma. *Es sei $V = (v_0, \dots, v_n) \in S_F(X)$ gegeben. Dann ist $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $t_i := \frac{i}{n}T$ für $i = 0, \dots, n$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$.*

Beweis. Es gilt für alle $i = 1, \dots, n$, dass die Funktion $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{i-1}, t_i]$ affin und damit auch monotaffin ist.

Es gilt für alle $i = 1, \dots, n - 1$, dass

$$\pi_{\text{pw.af.}}[V](t_i) = v_i \notin \text{conv}(v_{i-1}, v_{i+1}) = \text{conv}(\pi_{\text{pw.af.}}[V](t_{i-1}), \pi_{\text{pw.af.}}[V](t_{i+1})), \quad (10.3.4)$$

und das $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{i-1}, t_i]$ monotaffin und auf $[t_i, t_{i+1}]$ affin ist. Dann erhält man für alle $t \in]t_i, t_{i+1}]$ mit Hilfe des Korollars 10.1.12, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{i-1}, t]$ nicht monotaffin ist. Da außerdem noch $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{n-1}, t_n] = [t_{n-1}, T]$ monotaffin ist, folgt insgesamt, dass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ ist. \square

10.3.4 Definition. a) Der *Richtungswechselpunkt-Operator*

$$\rho_{S_F(X)} : \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X) \rightarrow S_F(X)$$

bildet $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ mit der Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u auf $(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n)) \in S_F(X)$ ab.

b) Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Der *Richtungswechselpunkt-Operator*

$$\rho_{S_F(X_1)} : \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X) \cap \text{Map}([0, T], X_1) \rightarrow S_F(X_1)$$

bildet $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X) \cap \text{Map}([0, T], X_1)$ auf $\rho_{S_F(X)}(u)$, ein Element von $S_F(X_1)$, ab.

Somit folgt aus dem Lemma 10.3.3:

10.3.5 Korollar. a) Für alle $V \in S_F(X)$ gilt $V = \rho_{S_F(X)}(\pi_{\text{pw.af.}}[V])$.

b) Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Für alle $V \in S_F(X_1)$ gilt $V = \rho_{S_F(X_1)}(\pi_{\text{pw.af.}}[V])$.

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen der Reduktion von Strings zu Konvexitätsstripel-freien Strings, und der Bildung der Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung für stückweise affine Funktionen.

10.3.6 Satz. Für alle $V \in S(X)$ gilt $\text{redu}(V) = \rho_{S_F(X)}(\pi_{\text{pw.af.}}[V])$.

Beweis. Wenn $V \in S_F(X_1)$ ist, liefert das Kor. 10.3.5 die Aussage.

Andernfalls ist $\text{redu}(V) = W_V$ mit W_V wie im Lemma 7.3.8.

Es sei $V = (v_0, \dots, v_n)$ und es seien $t_i := \frac{i}{n}T$ für $i = 0, \dots, n$. Dann ist für alle $k = 1, \dots, n$ $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{k-1}, t_k]$ affin und damit monotaffin.

Es seien N_i, m_i, w_i und i_* die Werte, die der Algorithmus im Lemma 7.3.8 liefert.

Es sei $0 = s_0 < \dots < s_m = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$.

Da

$$\rho_{S_F(X)}(\pi_{\text{pw.af.}}[V]) = (\pi_{\text{pw.af.}}[V](s_0), \dots, \pi_{\text{pw.af.}}[V](s_m)) \quad (10.3.5)$$

ist, folgt die gewünschte Aussage, wenn man $s_i = t_{m_i}$ für alle $0 = 1, \dots, i_*$ zeigen kann.

Der Beweis dafür erfolgt über vollständige Induktion.

Ind. Beg. für $n = 0$: Es ist $t_0 = 0 = \frac{0}{n}T = \frac{m_0}{n}T$.

Ind. Sch. $i - 1$ nach i : Es sei $i \in \{1, \dots, i_*\}$ so, dass $s_{i-1} = t_{m_{i-1}}$ ist. Nach der Konstruktion im Lemma 7.3.8 ist dann

$$\pi_{\text{pw.af.}}[V](s_{i-1}) = \pi_{\text{pw.af.}}[V](t_{m_{i-1}}) = v_{m_{i-1}} = w_{i-1}. \quad (10.3.6)$$

10. Stückweise monotaffine Funktionen und der Zusammenhang mit Strings

- Wenn $m_{i-1} + 1 = m_i$ ist, dann folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{m_{i-1}}, t_{m_{i-1}+1}] = [s_{i-1}, t_{m_i}]$ monotaffin ist.
- Wenn $m_{i-1} + 1 < m_i$ ist, dann folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{m_{i-1}}, t_{m_{i-1}+1}] = [s_{i-1}, t_{m_{i-1}+1}]$ monotaffin ist.

Für $k = m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1$ ergibt sich dann induktiv, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[s_{i-1}, t_k]$ monotaffin ist. Nach der Konstruktion im Lemma 7.3.8 gilt

$$\pi_{\text{pw.af.}}[V](t_k) = v_k \in \text{conv}(w_{i-1}, v_{k+1}) = \text{conv}(\pi_{\text{pw.af.}}[V](s_{i-1}), \pi_{\text{pw.af.}}[V](t_{k+1})). \quad (10.3.7)$$

Da außerdem $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_k, t_{k+1}]$ monotaffin ist, kann man das Lem. 10.1.9 anwenden, und es folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[s_{i-1}, t_{k+1}]$ monotaffin ist.

Dies zeigt, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[s_{i-1}, t_{m_i}]$ monotaffin ist, und somit $t_{m_i} \leq s_i$ ist.

- Wenn $t_{m_i} = T$ ist, dann folgt sofort, dass $s_i = T = t_{m_i}$ sein muss.
- Wenn $t_{m_i} < T$ ist, dann ist $m_i < n$. Es ist $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[t_{m_i}, t_{m_i+1}]$ affin und die Konstruktion in Lemma 7.3.8 liefert, dass

$$\begin{aligned} \pi_{\text{pw.af.}}[V](t_{m_i}) &= v_{m_i} \notin \text{conv}(w_i, v_{m_i+1}) \\ &= \text{conv}(\pi_{\text{pw.af.}}[V](s_{i-1}), \pi_{\text{pw.af.}}[V](t_{m_i+1})). \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

Für alle $t \in]t_{m_i}, t_{m_i+1}]$ liefert das Korollar 10.1.12, dass $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ auf $[s_{i-1}, t]$ nicht monotaffin ist. Somit muss $s_i \leq t$ sein.

Dies liefert insgesamt, dass $s_i = t_{m_i}$ ist. \square

Aus dem Satz folgt sofort

10.3.7 Korollar. *Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Für alle $V \in S(X_1)$ gilt $\text{redu}(V) = \rho_{S_F(X_1)}(\pi_{\text{pw.af.}}[V])$.*

10.3.8 Definition. Es sei $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ gegeben, und es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

Für alle $i = 1, \dots, n$ sei $\text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u] : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow [0, 1]$ die Parametrisierung von u auf $[t_{i-1}, t_i]$. Dann ist die Abbildung $\text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}[u] : [0, T] \rightarrow [0, T]$ mit

$$\text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}[u](t) := \left(1 - \text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t)\right) \frac{i-1}{n} T + \text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t) \frac{i}{n} T, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (10.3.9)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ die *Parametrisierung* von u .

10.3.9 Lemma. *Es sei $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ gegeben,*

- a) Dann ist die Parametrisierung $\text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}[u] : [0, T] \rightarrow [0, T]$ eine wohldefinierte, monoton steigende Funktion, und sogar eine zulässige Zeittransformation von $[0, T]$.*

b) Es ist

$$u = \pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{\text{SF}(X)}[u]] \circ \text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}[u]. \quad (10.3.10)$$

Beweis. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

Für $j = 1, \dots, n-1$ gilt:

- Betrachtet man (10.3.9) für $i = j-1$, dann liefert die Bemerkung 10.1.7, dass $\text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}[u](t) \in [\frac{j-1}{n}T, \frac{j}{n}T]$ für alle $t \in [t_{j-1}, t_j]$ gilt, und das $\text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}$ auf diesem Intervall monoton steigend ist.
- Wertet man die rechte Seite von (10.3.9) für $t = t_j$ und $j = i$ aus, so erhält man mit Hilfe von Bem. 10.1.7, dass

$$\begin{aligned} \text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}[u](t_j) &= (1 - \text{Para}_{[t_{j-1}, t_j]}[u](t_j)) \frac{j-1}{n}T + \text{Para}_{[t_{j-1}, t_j]}[u](t_j) \frac{j}{n}T \\ &= (1-1) \frac{j-1}{n}T + 1 \frac{j}{n}T = \frac{j}{n}T. \end{aligned} \quad (10.3.11)$$

- Wertet man die rechte Seite von (10.3.9) für $t = t_{i-1}$ und $i = j+1$ aus, so erhält man analog

$$\begin{aligned} \text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}[u](t_j) &= (1 - \text{Para}_{[t_j, t_{j+1}]}[u](t_j)) \frac{j}{n}T + \text{Para}_{[t_j, t_{j+1}]}[u](t_j) \frac{j+1}{n}T \\ &= (1-0) \frac{j}{n}T + 0 \frac{j+1}{n}T = \frac{j}{n}T. \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

- Es ist

$$\text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}[u](0) = (1 - \text{Para}_{[t_0, t_1]}[u](t_0)) \frac{0}{n}T + \text{Para}_{[t_0, t_1]}[u](t_0) \frac{1}{n}T = 0, \quad (10.3.13)$$

$$\text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}[u](T) = (1 - \text{Para}_{[t_{n-1}, t_n]}[u](t_n)) \frac{n-1}{n}T + \text{Para}_{[t_{n-1}, t_n]}[u](t_n) \frac{n}{n}T = T. \quad (10.3.14)$$

Dies zeigt die Aussage a).

Es ist $\rho_{\text{SF}(X)}[u] = (u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_n))$. Also gilt $\pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{\text{SF}(X)}[u]](\frac{i}{n}T) = u(t_i)$ für alle $i = 0, \dots, n$.

Für alle $i = 1, \dots, n$ und $t \in [t_{i-1}, t_i]$ gilt somit, da $\pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{\text{SF}(X)}[u]]$ auf $[\frac{i-1}{n}T, \frac{i}{n}T]$ affin ist, und (10.1.7) mit $t_a := t_{i-1}$ und $t_b := t_i$ anwendbar ist, dass

$$\begin{aligned} \pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{\text{SF}(X)}[u]] \circ \text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}[u](t) &= \pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{\text{SF}(X)}[u]] (\text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}[u](t)) \\ &= (1 - \text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t)) \pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{\text{SF}(X)}[u]] \left(\frac{i-1}{n}T \right) \\ &\quad + \text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t) \pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{\text{SF}(X)}[u]] \left(\frac{i}{n}T \right) \\ &= (1 - \text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t)) u(t_{i-1}) + \text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t) u(t_i) = u(t). \end{aligned} \quad (10.3.15)$$

□

11. Hysterese-Operatoren für stückweise monotaffine Funktionen und ihre Erzeugung mit Hilfe von Funktionen auf Konvexitätstripel-freien Strings

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest. Es sei X ein topologischer Vektorraum, es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X und es sei Y eine nichtleere Menge.

11.1. Der Gedächtnis-Hysterese-Operator für stückweise monotaffine Input-Funktionen mit Standard-Monotaffinitäts-Zerlegungen

Im Zusammenhang mit dem Darstellungsergebnis [8] für Hysterese-Operatoren mit skalaren, stetigen, stückweise monotonen Input-Funktionen wird häufig darauf hingewiesen (vgl. [66]), dass man dank des Resultats von einer Input-Funktion nur die lokalen Extrema behalten muss, um den Wert des Outputs eines Hysterese-Operators bestimmen zu können.

In dem Fall von stückweise monotaffinen Funktionen mit Standard-Monotaffinitäts-Zerlegungen kann man dieses Gedächtnisverhalten folgendermassen formalisieren:

11.1.1 Definition. a) Es seien $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ und die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben. Dann ist $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u] : [0, T] \rightarrow S_F(X_1)$ definiert durch

$$\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t) := (u(t_0), u(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (11.1.1a)$$

$$\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t) := (u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t)), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad 2 \leq i \leq n. \quad (11.1.1b)$$

b) Der *Gedächtnis-Hysterese-Operator* auf $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ ist die Abbildung

$$\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}} : \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], S_F(X_1)),$$

die $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ auf die in a) definierte Funktion $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u] \in \text{Map}([0, T], S_F(X_1))$ abbildet.

11. Hysterese-Operatoren für stückweise monotaffine Funktionen und ihre Erzeugung

Das folgende Lemma zeigt, dass die Formulierungen in der obigen Definition zulässig sind.

11.1.2 Lemma. *Der in Def. 11.1.1 definierte Operator*

$$\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.} : \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], S_F(X_1))$$

ist wohldefiniert und ein Hysterese-Operator.

Beweis. Für alle $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ liefert das Korollar 10.3.2, dass die rechten Seiten der Gleichungen in (11.1.1) wohldefinierte Elemente von $S_F(X_1)$ sind. Daraus erhält man, dass $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}[u]$ eine wohldefinierte Funktion in $\text{Map}([0, T], S_F(X_1))$ ist.

Dies liefert, dass $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}$ ein wohldefinierter Operator ist.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}$ ein Hysterese-Operator ist, sind die Kausalität und die Ratenunabhängigkeit des Operators nachzuweisen.

Kausalität: Es seien $u, v \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ und $t^* \in [0, T]$ gegeben, so dass $u(t) = v(t)$ für alle $t \in [0, t^*]$. Es seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ bzw. $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u bzw. v .

- Wenn $t^* \leq t_1$ ist, dann ist u auf $[0, t^*]$ monotaffin, und wegen der Gleichheit auf dem Intervall $[0, t^*]$ ist dann auch v auf $[0, t^*]$ monotaffin. Also ist $t^* \leq s_1$ und mit (11.1.1) folgt, dass

$$\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}[u](t) = (u(t_0), u(t)) = (v(t_0), v(t)) = \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}[v](t). \quad (11.1.2)$$

- Jetzt wird der Fall $t^* > t_1$ betrachtet. Dann gibt es ein $k > 1$, so dass $t^* \in [t_{k-1}, t_k]$. Dann liefert die Aussage b.) in Kor. 10.2.11, dass $m \geq i$ und $s_i = t_i$ für alle $0 \leq i < k$. Somit ist $u(t_i) = v(s_i)$ für alle $0 \leq i < k$, $t^* \in [s_{k-1}, s_k]$, und es folgt mit (11.1.1b)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}[u](t^*) &= (u(t_0), \dots, u(t_{k-1}), u(t^*)) \\ &= (v(s_0), \dots, v(s_{k-1}), v(t^*)) = \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}[v](t^*). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}$ kausal ist.

Ratenunabhängigkeit: Es seien $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ und eine zulässige Zeittransformationen α von $[0, T]$ gegeben. Ist $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich $u \circ \alpha$, dann liefert Lem. 10.2.13, dass $0 = \alpha(s_0) < \alpha(s_1) < \dots < \alpha(s_m) = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u ist, und dass für alle $s \in [0, T]$ und alle $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt, dass

$$s \in [s_{k-1}, s_k] \iff \alpha(s) \in [\alpha(s_{k-1}), \alpha(s_k)]. \quad (11.1.3)$$

Aus (11.1.1) folgt somit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}[u \circ \alpha](s) &= (u \circ \alpha(s_0), u \circ \alpha(s)) \\ &= (u(\alpha(s_0)), u(\alpha(s))) = \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{pw.mo.af.}[u](\alpha(s)), \quad \forall s \in [s_0, s_1], \end{aligned} \quad (11.1.4)$$

11.1. Der Gedächtnis-Hysterese-Operator für stückweise monotaffine Input-Funktionen

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u \circ \alpha](s) &= (u \circ \alpha(s_0), \dots, u \circ \alpha(s_{i-1}), u \circ \alpha(s)) \\
&= (u(\alpha(s_0)), \dots, u(\alpha(s_{i-1})), u(\alpha(s))) \\
&= \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](\alpha(s)), \quad \forall s \in]s_{k-1}, s_k], k = 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{11.1.5}$$

Also ist $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}$ ratenunabhängig. \square

Kombiniert man das Lemma 11.1.2 mit dem Lemma 2.1.2, dann sieht man, dass die Notation in der folgenden Definition wohldefiniert ist.

11.1.3 Definition. Es sei eine Funktion $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben. Der von G auf $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ generierte Hysterese-Operator

$$\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}} : \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$$

ist definiert durch

$$\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}} := G \circ \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}. \tag{11.1.6}$$

11.1.4 Bemerkung. Es sei eine Funktion $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben.

Es seien $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ und die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben. Dann gilt für $\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[u] : [0, T] \rightarrow Y$ definiert durch (11.1.6), dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[u](t) = G(u(t_0), u(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \tag{11.1.7a}$$

$$\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[u](t) = G(u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t)), \quad \forall t \in]t_{i-1}, t_i], 2 \leq i \leq n. \tag{11.1.7b}$$

11.1.5 Lemma. Es sei eine Funktion $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben. Dann gilt für $\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \cdot \rangle$ wie in Def. 9.1.1:

$$\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}} \rangle = G. \tag{11.1.8}$$

Beweis. Da nach dem Korollar 10.2.10 jede affine Funktion als stetige, stückweise monotaffine Funktion eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung hat, folgt dass

$$C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1) \subseteq \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1).$$

Also ist $\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}} \rangle$ wohldefiniert.

Es sei $V = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ beliebig. Nach Lemma 10.3.3 ist $0 = \frac{0}{n}T < \frac{1}{n}T < \dots < \frac{n}{n}T = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$ und somit

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]](T) &= \left(\pi_{\text{pw.af.}}[V](0), \pi_{\text{pw.af.}}[V]\left(\frac{1}{n}T\right), \dots, \pi_{\text{pw.af.}}[V]\left(\frac{n}{n}T\right) \right) \\
&= (v_0, v_1, \dots, v_n) = V.
\end{aligned} \tag{11.1.9}$$

11. Hysterese-Operatoren für stückweise monotaffine Funktionen und ihre Erzeugung

Daraus ergibt sich mit Def. 9.1.1, dass

$$\begin{aligned} \text{Gen}_{S_F(X_1)} \left\langle \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}} \right\rangle (V) &= \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]](T) \\ &= G \left(\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]](T) \right) = G(V). \end{aligned} \quad (11.1.10)$$

□

11.1.6 Definition. Es seien eine nichtleere Menge Z und eine Funktion $G : Z \times S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben.

- a) Für $(z, u) \in Z \times \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ sei $\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[z, u] : [0, T] \rightarrow Y$ definiert durch

$$\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[z, u](t) := G \left(z, \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t) \right), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (11.1.11)$$

- b) Der von G auf $Z \times \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ generierte Hysterese-Operator mit Anfangszustand in Z

$$\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}} : Z \times \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$$

bildet $(z, u) \in Z \times \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ auf die in a) definierte Funktion $\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[z, u]$ in $\text{Map}([0, T], Y)$ ab.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Notation in der obigen Definition wohldefiniert ist.

11.1.7 Lemma. Es seien eine nichtleere Menge Z und eine Funktion $G : Z \times S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben. Dann gilt

- a) Der Operator $\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}$ aus Def. 11.1.6 ist ein Hysterese-Operator auf $Z \times \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ mit Anfangszustand in Z .
- b) Für alle $z \in Z$ gilt für den nach Def. 11.1.3a) definierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_{G[z, \cdot]}^{\text{pw.mo.af.}} : \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map } Y$, dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[z, u] = \mathcal{H}_{G[z, \cdot]}^{\text{pw.mo.af.}}[u], \quad \forall u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1). \quad (11.1.12)$$

Beweis. Vergleicht man die beiden Definitionen, dann sieht man, dass für alle $z \in Z$ die Gleichung (11.1.12) gilt. Nach dem Lemma 11.1.2 ist somit für alle $z \in Z$ der Operator $\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[z, \cdot] = \mathcal{H}_{G[z, \cdot]}^{\text{pw.mo.af.}}$. Also ist $\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[z, \cdot]$ ein Hysterese-Operator. Dies liefert, dass $\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}$ ein Hysterese-Operator ist. □

11.1.8 Bemerkung. Es seien eine nichtleere Menge Z und eine Funktion $G : Z \times S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben. Dann gilt für $z \in Z$, $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ und die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u , dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[z, u](t) = G(z, (u(t_0), u(t))), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (11.1.13a)$$

$$\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[z, u](t) = G(z, (u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t))), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad 2 \leq i \leq n. \quad (11.1.13b)$$

11.2. Der Darstellungssatz für Hysterese-Operatoren für stetige, stückweise monotaffine Input-Funktionen

Da nach dem Korollar 10.2.10 jede stetige, stückweise monotaffine Funktion eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung hat, ist die folgende Definition wohldefiniert.

11.2.1 Definition. Es sei eine Funktion $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben.

Die Einschränkung von $\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}} : \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ aus Def. 11.1.3 auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ liefert den *von G auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ generierten Hysterese-Operator*

$$\mathcal{H}_G^{\text{gen.}} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y).$$

Dank der Vorarbeiten kann der folgende Satz, welcher das erste neue grundlegende vollständige Darstellungsergebnis für Hysterese-Operatoren in dieser Arbeit ist, formuliert und schnell bewiesen werden.

11.2.2 Erster neuer Darstellungssatz für Hysterese-Operatoren.

- a) Für jeden Hysterese-Operator $\mathcal{G} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gibt eine eindeutig definierte Funktion $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$, so dass \mathcal{G} der von G auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_G^{\text{gen.}}$ ist.
- b) Die in a) betrachtete Funktion G ist gleich der in Def. 9.1.1. definierten Funktion $\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{G} \rangle$.

Beweis. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{G} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gleich der in Def. 9.1.1. definierten Funktion $\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{G} \rangle$. Mit Hilfe von Lem. 11.1.5 folgt dann, dass

$$\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}_G^{\text{gen.}} \rangle = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}} \rangle = G = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{G} \rangle. \quad (11.2.1)$$

Wendet man jetzt das Lemma 9.1.7 auf die Einschränkungen von $\mathcal{H}_G^{\text{gen.}}$ und \mathcal{G} auf $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ an, dann folgt, dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{gen.}}[v] = \mathcal{G}[v], \quad \forall v \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1). \quad (11.2.2)$$

Für $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ sei $\text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}[u]$ die in Def. 10.3.8 definierte Parametrisierung von u . Für diese gilt nach (10.3.10) wegen der Ratenunabhängigkeit der betrachteten Operatoren, dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{gen.}}[u] = \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[\pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{S_F(X)}[u]]] \circ \text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}[u], \quad (11.2.3)$$

$$\mathcal{G}[u] = \mathcal{G}[\pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{S_F(X)}[u]]] \circ \text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}[u]. \quad (11.2.4)$$

Da $\pi_{\text{pw.af.}}[\rho_{S_F(X)}[u]] \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X_1)$ ist, liefert somit (11.2.2), dass $\mathcal{H}_G^{\text{gen.}}[u] = \mathcal{G}[u]$.

Also ist \mathcal{G} der von der Funktion G auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_G^{\text{gen.}}$.

Um den Satz vollständig zu beweisen, bleibt noch zu zeigen, dass G die einzige Funktion von $S_F(X_1)$ nach Y ist, so dass \mathcal{G} der von der Funktion auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ generierte

11. Hysterese-Operatoren für stückweise monotaffine Funktionen und ihre Erzeugung

Hysterese-Operator ist. Sei also $F : S_F(X_1) \rightarrow Y$, so dass $\mathcal{H}_F^{\text{gen.}} = \mathcal{G}$ ist, beliebig. Mit den Lemma 11.1.5 folgt dann, dass

$$\begin{aligned} F &= \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}_F^{\text{pw.mo.af.}} \rangle = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}_F^{\text{gen.}} \rangle = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{G} \rangle \\ &= \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}_G^{\text{gen.}} \rangle = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}} \rangle = G. \end{aligned} \quad (11.2.5)$$

□

11.2.3 Bemerkung. a) Wenn man einen Hysterese-Operator \mathcal{H} , der auf den stetigen, stückweise monotaffinen Funktionen von $[0, T]$ nach X_1 definiert ist, auswerten will, dann reicht es aus, die Funktionswerte der Input-Funktion zu den Zeitpunkten zu speichern, an dem die Änderung der Input-Funktion ihre Richtung wechselt, und diese Werte zusammen mit dem aktuellen Wert der Input-Funktion als Input für die String-Funktion $\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{H} \rangle : S_F(X_1) \rightarrow Y$ zu verwenden, die von \mathcal{H} generiert wird.

Der Gedächtnis-Hysterese-Operator $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}$ stellt genau diese Daten zur Verfügung.

- b) Da man die Hysterese-Operatoren von $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ nach $\text{Map}([0, T], Y)$ eindeutig mit den Funktionalen beschreiben kann, die sie erzeugen, kann man, wie es z.B. in [5, 8, 54] für Hysterese-Operatoren mit stetigen, stückweise monotonen Input-Funktionen getan wird, Eigenschaft der Operatoren mit Hilfe der Funktionale formulieren und untersuchen. Beispiele dafür folgen in Kapitel 12.
- c) Wenn man Hysterese-Operatoren betrachten will, die für stückweise monotaffine Funktionen definiert sind, dann gibt es zwei Probleme.
1. Der in Def. 11.1.3 für eine Funktion $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ definierte Operator $\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}$ ist nur für diejenigen Input-Funktionen wohldefiniert, die eine Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung haben, d.h. der Operator in dieser Form ist nur auf $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ definiert.
 2. Selbst wenn man sich auf die Menge $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ von Input-Funktionen beschränkt, sind viele der Hysterese-Operatoren von $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ nach $\text{Map}([0, T], Y)$ **nicht** von der in Def. 11.1.3 beschriebenen Form. Diese Form spiegelt nur eine mögliche Fortsetzung eines Operators, der auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ definiert ist, zu einem Operator auf $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ wieder.

So gilt für den Operator

$$\mathcal{H}_{\text{cont-test}} : \text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], X), \quad (11.2.6a)$$

$$\mathcal{H}_{\text{cont-test}}[u](t) = \begin{cases} u(t), & \text{wenn die Einschränkung von } u \text{ auf } [0, t] \text{ stetig ist,} \\ 0_X, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (11.2.6b)$$

dass die Einschränkung auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ die Identität liefert, und somit

$$G := \text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{H}_{\text{cont-test}} \rangle (v_0, \dots, v_n) = v_n, \quad \forall (v_0, \dots, v_n) \in S_F(X). \quad (11.2.7)$$

11.3. Übertragung des Darstellungsergebnisses auf Hyst.-Operat. mit Anfangszuständen

Dann ist $\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}$ die Identität auf $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$, und somit nicht die Einschränkung von $\mathcal{H}_{\text{cont-test}}$ auf diese Menge.

Weitere Beispiele werden im Abschnitt 16.4 vorgestellt.

Das Darstellungsergebnis für Input-Funktionen, die endlich viele Sprungstellen haben, findet sich in Satz 20.2.4

11.3. Übertragung des Darstellungsergebnisses auf Hysterese-Operatoren mit Anfangszuständen

11.3.1 Definition. Es seien eine nichtleere Menge Z und eine Funktion $Z \times G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben.

Die Einschränkung von $\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}} : Z \times \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ aus Def. 11.1.6 auf $Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ liefert den von G auf $Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ generierten Hysterese-Operator mit Anfangszustand in Z

$$\mathcal{H}_G^{\text{init.,gen.}} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y).$$

11.3.2 Satz. Es sei Z eine nichtleere Menge.

a) Für jeden Hysterese-Operator $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand in Z gibt es eine eindeutig definierte Funktion $G : Z \times S_F(X_1) \rightarrow Y$, so dass \mathcal{H} der von G auf $Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_G^{\text{init.,gen.}}$ ist.

b) Die in a) betrachtete Funktion G ist gleich der in Def. 9.1.1. definierten Funktion $\text{Gen}_{Z \times S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$.

Beweis. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand in Z gegeben.

Wendet man für $z \in Z$ beliebig den Satz 11.2.2 auf $\mathcal{H}[z, \cdot] : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ an, dann erhält man eine eindeutige Funktion $G_z : S_F(X_1) \rightarrow Y$, so dass $\mathcal{H}[z, \cdot] = \mathcal{H}_{G_z}^{\text{gen.}}$ ist, und es ist $G_z = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H}[z, \cdot] \rangle$.

Definiert man jetzt $G : Z \times S_F(X_1)$ durch $G(z, u) = G_z(u)$ für alle $z \in Z$ und $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$, dann liefert (11.1.12), dass $\mathcal{H} = \mathcal{H}_G^{\text{init.,gen.}}$ ist.

Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit für alle z , und mit dem Lemma 9.2.2 folgt, dass $G = \text{Gen}_{Z \times S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$. \square

11.4. Auswertung der Fortsetzung einer Funktion von $S_F(X_1)$ auf $S(X_1)$

11.4.1 Bemerkung. Im Zusammenhang mit dem Darstellungsergebnis für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen wird in [8, (2.10), Remark 2.2.6] ein Ansatz vorgestellt, um ein Funktional h auf den alternierenden Strings von reellen Zahlen zu einem Funktional auf beliebigen Strings von reellen Zahlen zu erweitern. Bei diesem Ansatz

11. Hysterese-Operatoren für stückweise monotaffine Funktionen und ihre Erzeugung

wird die für einen String definierte stückweise lineare Interpolationsfunktion als Input für den vom Funktional h generierten Hysterese-Operator auf den stetigen, stückweise monotonen Funktionen verwendet, und das Resultat definiert das Bild des Strings unter dem neuen Funktional.

Es sei nun eine Funktion $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben. Überträgt man den obigen Ansatz, so erhält man als Fortsetzung

$$G_{Fort.} : S(X_1) \rightarrow Y, \quad \text{mit} \quad G_{Fort.}(V) := \mathcal{H}_G^{\text{gen.}}(\pi_{\text{pw.af.}}[V])(T), \quad \forall V \in S(X_1).$$

Kombiniert man dies mit der Def. 11.2.1 von $\mathcal{H}_G^{\text{gen.}}$, der Def. 11.1.3 und der Def. 10.3.4 von $\rho_{S_F(X)}$, dann folgt mit

$$G_{Fort.}(V) = G(\rho_{S_F(X)}[\pi_{\text{pw.af.}}[u]]), \quad \forall V \in S(X_1),$$

das Analogon der Formel [8, (2.11)] für die Erweiterung des Funktionals.

Mit dem Satz 10.3.6 und der Def. 7.3.12 ergibt sich, dass $G_{Fort.} = G \circ \text{redu} = \text{ext}(G)$.

Die Konstruktion der Reduktion redu in 7.3.9 war also derartig angelegt, dass man mit ihr über die Def. 7.3.12 die oben diskutierte Erweiterung einer Funktion von $S_F(X_1)$ auf $S(X_1)$ auswerten kann, **ohne** dabei die interpolierenden Funktionen oder den Richtungswechseloperator zu benötigen.

Aus den obigen Betrachtungen folgt:

11.4.2 Korollar. *Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $G : S(X_1) \rightarrow Y$ definiert durch $G = \text{Gen}_{S(X_1)}\langle \mathcal{H} \rangle$.*

Für $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ und jede Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ gelten die Gleichungen in (11.1.7).

12. Anwendungen des Darstellungssatzes für Hysterese-Operatoren

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest. Es sei X ein linearer topologischer Vektorraum, es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X und es sei Y eine nichtleere Menge.

12.1. Übertragung von Definitionen aus dem skalaren Fall

Zur Vorbereitung der weiteren Untersuchungen sollten zunächst noch Betrachtungen für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen auf solche mit vektoriellen Input-Funktionen übertragen werden, und eine neue Kongruenz-Eigenschaft formuliert werden.

12.1.1. Madelungsche Regeln

Die Def. 4.1.3 geht über in:

12.1.1 Definition. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq \text{Map}([0, T], X)$ gegeben. Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die erste Madelungsche Regel gilt, wenn für alle Funktionen $u, v \in D(\mathcal{H})$, alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$ gilt:

Wenn

a) u auf $[t_1, t_3]$ stetig ist, v auf $[s_1, s_3]$ stetig ist,

b) u auf $[t_1, t_2]$ und auf $[t_2, t_3]$ monotaffin ist,

c) v auf $[s_1, s_2]$ und auf $[s_2, s_3]$ monotaffin ist,

d)

$$u(t_1) = v(s_1) = u(t_3) = v(s_3) \neq v(s_2) = u(t_2), \quad (12.1.1)$$

e) und

$$\mathcal{H}[u](t_2) = \mathcal{H}[v](s_2) \quad (12.1.2)$$

ist,

dann folgt,

$$\mathcal{H}[u](t_3) = \mathcal{H}[v](s_3). \quad (12.1.3)$$

12. Anwendungen des Darstellungssatzes für Hysterese-Operatoren

Die Definition 4.1.4 geht über in:

12.1.2 Definition. Es seien eine nichtleere Menge Z und ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit einem Anfangszustand in Z gegeben. Dann sagt man, dass *für \mathcal{H} die erste Madelungsche Regel gilt*, wenn für alle $z, z' \in Z$, alle $u \in D(\mathcal{H}[z, \cdot])$, alle $v \in D(\mathcal{H}[z', \cdot])$, alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$ gilt:

Wenn die Voraussetzungen a)–d) in Definition 12.1.1 erfüllt sind, und

$$\mathcal{H}[z, u](t_2) = \mathcal{H}[z', v](s_2), \quad (12.1.4)$$

gilt, dann folgt dass

$$\mathcal{H}[z, u](t_3) = \mathcal{H}[z', v](s_3). \quad (12.1.5)$$

Die Definition 4.1.6 geht über in:

12.1.3 Definition. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq \text{Map}([0, T], X)$ gegeben.

Dann sagt man, dass *für \mathcal{H} die abgeschwächte Form der ersten Madelungschen Regel gilt*, wenn die folgenden Bedingung erfüllt ist:

Für alle Funktionen $u, v \in D(\mathcal{H})$, und alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$ gilt:

Wenn die Voraussetzungen a)–d) in Definition 12.1.1 erfüllt sind und für alle $t \in [t_1, t_2]$ und alle $s \in [s_1, s_2]$ mit $u(t) = v(s)$ gilt, dass $\mathcal{H}[u](t) = \mathcal{H}[v](s)$ ist, dann folgt, dass (12.1.3) gilt.

Die Bedingungen an die Funktionswerte in der Definition 4.1.10 des Madelungzyklus kann man im skalaren Fall äquivalent als Bedingungen mit $\text{conv}(\cdot, \cdot)$ formulieren. Überträgt man diese Formulierung auf den vektoriellen Fall, und ersetzt man in der Definition „monoton“ durch „monotaffin“, so erhält man:

12.1.4 Definition. Sei eine Funktion $u : [0, T] \rightarrow X$ gegeben und es seien $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ gegeben. Dann sagt man, dass *u auf dem Intervall $[t_1, t_4]$ einen Madelungzyklus mit den Umkehrpunkten t_2 und t_3 beschreibt*, wenn u auf $[t_1, t_4]$ stetig ist, u auf den Intervallen $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ und $[t_3, t_4]$ monotaffin ist, und

$$u(t_2) \notin \text{conv}(u(t_1), u(t_3)), \quad u(t_3) \notin \text{conv}(u(t_2), u(t_4)), \quad (12.1.6)$$

$$u(t_2), u(t_3) \in \text{conv}(u(t_1), u(t_4)), \quad (12.1.7)$$

Damit ergeben sich als vektorielle Versionen von Def. 4.1.13 und Def. 4.1.14:

12.1.5 Definition. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.

- a) Dann sagt man, dass *für \mathcal{H} die zweite Madelungsche Regel gilt*, wenn für alle Funktionen $u \in D(\mathcal{H})$, und alle $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, so dass u auf dem Intervall $[t_1, t_4]$ einen Madelungzyklus mit den Umkehrpunkten t_2 und t_3 beschreibt und $u(t_2) = u(t_4)$ ist, gilt dass $\mathcal{H}[u](t_2) = \mathcal{H}[u](t_4)$.

- b) Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die dritte Madelungsche Regel gilt, wenn für alle Funktionen $u, v \in D(\mathcal{H})$, und alle $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, so dass u auf dem Intervall $[t_1, t_4]$ einen Madelungzyklus mit den Umkehrpunkten t_2 und t_3 beschreibt, $u(s) = v(s)$ für alle $s \in [0, t_1] \cup [t_4, T]$ gilt, und v auf $[t_1, t_4]$ monotaffin ist, folgt, dass $\mathcal{H}[u](t) = \mathcal{H}[v](t)$ für alle $t \in [t_4, T]$ ist.

12.1.6 Definition. Es sei Z eine nichtleere Menge.

Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq Z \times \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit Anfangszustand in Z .

- a) Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die zweite Madelungsche Regel gilt, wenn für $z \in Z$ gilt, dass für $\mathcal{H}[z, \cdot]$ die zweite Madelungsche Regel gilt.
- b) Dann sagt man, dass für \mathcal{H} die dritte Madelungsche Regel gilt, wenn für $z \in Z$ gilt, dass für $\mathcal{H}[z, \cdot]$ die dritte Madelungsche Regel gilt.

12.1.2. Kongruenz-Eigenschaften im Umkehrbereich und Aktualisierungsfunktionen

12.1.7 Bemerkung. Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist.

- a) Es übertragen sich die Kongruenz-Eigenschaften im Umkehrbereich der Input-Funktion im Abschnitt 4.1.4, wenn man beim Verweis auf die Voraussetzungen a)–d in Definition 4.1.3 in b) und c) jeweils monoton durch monotaffin ersetzt, oder, äquivalent, auf die Voraussetzungen a)–d in Definition 12.1.1 verweist.
- b) Die Betrachtungen zu den Aktualisierungsfunktionen in Abschnitt 4.2 übertragen sich, wobei
- die potentiellen Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen von der Form $H : Y \times X \times X \rightarrow Y$ sind,
 - die potentiellen additiven Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen von der Form $h : X \times X \rightarrow Y$ sind.

Wenn $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ im Definitionsbereich des Operators enthalten ist, dann sind die Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion und die additiven Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion, eindeutig definiert, wenn es sie gibt. Also sind insbesondere für Operatoren, die auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ definiert sind, diese Aktualisierungsfunktionen eindeutig definiert.

12.2. Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereich der Input-Funktion

In [56, Kap 3.3] wird eine Kongruenz-Eigenschaft für vektorielle Input-Funktionen formuliert, bei der verlangt wird, dass dann, wenn zwei Input-Funktionen die gleiche geschlossene Kurve beschreiben, die beiden Outputs zwei geschlossene Kurven beschreiben, die kongruent sind.

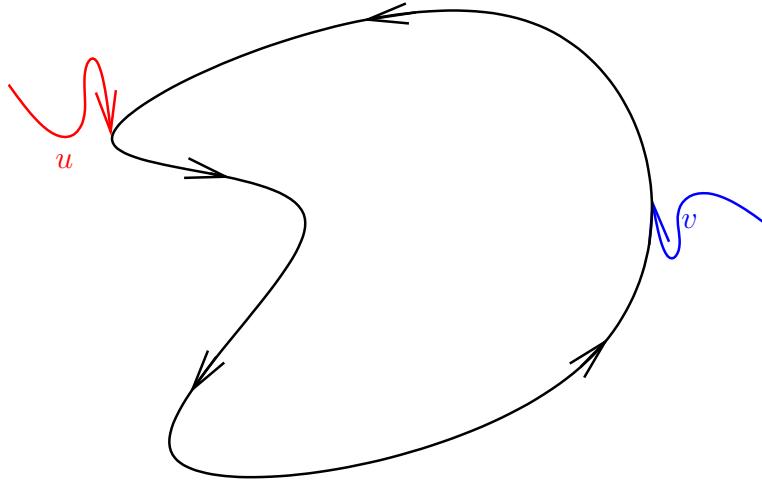


Abbildung 12.1.: Zwei Input-Funktionen u und v , die nach unterschiedlichem Anfang die gleiche geschlossene Kurve beschreiben

Dies soll auch dann gelten, wenn die beiden Input-Funktionen, bevor sie die Kurve beschreiben, unterschiedlich sind, und auch dann, wenn die Funktionen die Kurve von unterschiedlichen Startpunkten aus an beschreiben. Diese Eigenschaft soll auch für die vektoriellen PREISACH-Operatoren wie im Abschnitt 6.1.1 gelten. Bei einer genauen Betrachtung stellt man allerdings fest, dass für diese PREISACH-Operatoren die Gleichheit oft erst beim zweiten Durchlauf der Input-Funktion durch die geschlossene Kurve gilt. Dies führt zu der folgenden Definition, die dieses Verhalten zulässt:

12.2.1 Definition. Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq \text{Map}([0, T], X)$ gegeben.

Dann sagt man, dass \mathcal{H} die *Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion* hat, wenn die folgenden Bedingung erfüllt ist:

Für alle Funktionen $u, v \in D(\mathcal{H})$, und alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$ gilt

$$\mathcal{H}[u](t_3) - \mathcal{H}[u](t_2) = \mathcal{H}[v](s_3) - \mathcal{H}[v](s_2), \quad (12.2.1)$$

wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

a) Es ist

$$u(t_1) = u(t_2) = v(s_1) = v(s_2) \neq u(t_3) = v(t_3). \quad (12.2.2)$$

b) Es gibt eine stetige, streng monotone Funktion $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow [s_1, s_2]$ mit

$$\gamma(t_1) = s_1, \quad \gamma(t_2) = s_2, \quad u(t) = v(\gamma(t)), \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (12.2.3)$$

c) Es gilt

$$u(t) = u(t - (t_2 - t_1)), \quad v(s) = v(s - (s_2 - s_1)), \quad \forall t \in [t_2, t_3], s \in [s_2, s_3]. \quad (12.2.4)$$

12.2.2 Definition. Es seien eine nichtleere Menge Z und ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq Z \times \text{Map}[0, T]) \rightarrow \text{Map}[0, T]$ mit einem Anfangszustand in Z gegeben.

Dann sagt man, dass \mathcal{H} die *Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion* hat, wenn die folgenden Bedingung erfüllt ist: Für alle $z, z' \in Z$ und alle Funktionen $u \in D(\mathcal{H}[z, \cdot])$, und $v \in D(\mathcal{H}[z', \cdot])$, alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$ und alle $s_1, s_2, s_3 \in [0, T]$ mit $s_1 < s_2 < s_3$, gilt:

Wenn die Voraussetzungen a)–c) in Definition 12.2.1 erfüllt sind, dann gilt

$$\mathcal{H}[z, u](t_3) - \mathcal{H}[z, u](t_2) = \mathcal{H}[z', v](s_3) - \mathcal{H}[z', v](s_2). \quad (12.2.5)$$

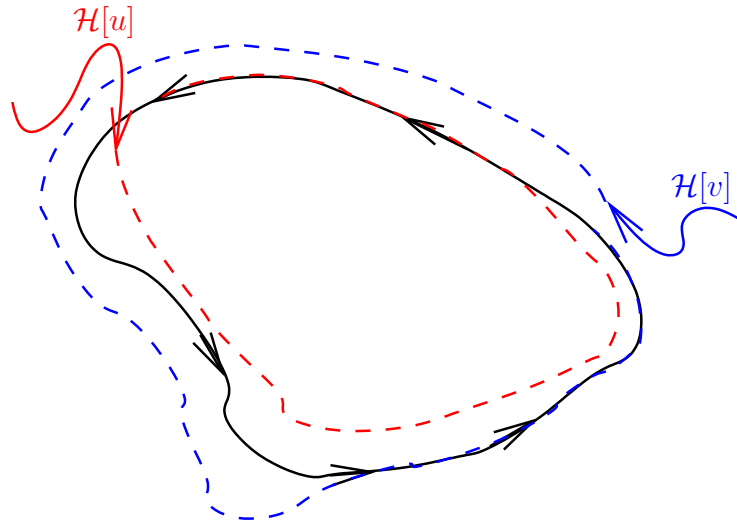


Abbildung 12.2.: Die Output-Funktionen $\mathcal{H}[u]$ und $\mathcal{H}[v]$, die nach unterschiedlichem Anfang und einem unterschiedlichen Bild für die erste Input-Periode (gestrichelt) ab der zweiten Input-Periode die gleiche geschlossene Kurve beschreiben

Weiterhin ist man, wie in [56, Kap 3.3], häufig an Operatoren interessiert, die, wenigstens vom zweiten Durchlauf an, für periodische Input-Funktionen auch periodische Output-Funktionen liefern:

12.2.3 Definition. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq \text{Map}([0, T], X)$ gegeben.

Dann sagt man, dass \mathcal{H} *periodische Input-Funktionen auf periodische Output-Funktionen abbildet*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Für alle Funktionen $u \in D(\mathcal{H})$, und alle $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$, $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ und

$$u(t) = u(t - (t_2 - t_1)), \quad \forall t \in [t_2, t_3], \quad (12.2.6)$$

gilt

$$\mathcal{H}[u](t_3) = \mathcal{H}[u](t_2). \quad (12.2.7)$$

12.3. Kongruenz, Madelung'sche Regel und Aktualisierungsfunktionen

Die Darstellung des Hysterese-Operators mit Hilfe einer String-Funktion erlaubt es, einige Kongruenz-Bedingungen, die Gültigkeit der Madelung'schen Regeln, und die Formeln für die Aktualisierungsfunktionen als Bedingungen an die String-Funktion zu formulieren.

Für die Formulierung der folgenden Aussage wird ausgenutzt, dass für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ und alle $v \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \setminus \{v_n\}$ nach Lem. 7.3.4 gilt, dass $(v_0, \dots, v_n, v) \in S_F(X_1)$.

12.3.1. Beschreibung von Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktionen

12.3.1 Lemma. *Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert, d.h. $G = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$.*

- a) *Eine Funktion $H : Y \times X \times X \rightarrow Y$, so dass $H(y, x, x) = y$ für alle $(y, x) \in Y \times X$ gilt, ist genau dann eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ und alle $v \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \setminus \{v_n\}$ gilt, dass*

$$G(v_0, v_1, \dots, v_n, v) = H(G(v_0, v_1, \dots, v_n), v_n, v). \quad (12.3.1)$$

- b) *Eine Funktion $h : X^2 \rightarrow Y$ mit $h(x_1, x_1) = 0$ für alle $x_1 \in X$ ist genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ und alle $v \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \setminus \{v_n\}$ gilt, dass*

$$G(v_0, \dots, v_n, v) = G(v_0, v_1, \dots, v_n) + h(v_n, v). \quad (12.3.2)$$

Beweis. a) \Leftarrow : Für $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ und Zeiten $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2 < t_3$, so dass u auf $[t_1, t_2]$ und auf $[t_2, t_3]$ monotaffin und stetig ist und $u(t_3) \in \text{conv}(u(t_1), u(t_2))$ ist, ist (4.2.1) zu zeigen, d.h. es ist zu beweisen, dass

$$G\left(\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t_3)\right) = H\left(G\left(\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t_2)\right), u(t_2), u(t_3)\right). \quad (12.3.3)$$

Es sei $0 = s_0 < \dots < s_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für u , und es sei $i \in \{1, \dots, n\}$ so, dass $t_2 \in]s_{i-1}, s_i]$ liegt.

- Wenn $u(t_2) = u(t_3)$ ist, dann ist u auf $[t_2, t_3]$ konstant. Da $t_2 \in]s_{i-1}, s_i]$ und u auf $[s_{i-1}, s_i]$ monotaffin ist, und somit u auch auf $[s_{i-1}, t_2]$ monotaffin ist, liefert jetzt das Lemma 10.1.10, dass u auch auf $[s_{i-1}, t_3]$ monotaffin ist, und somit, nach der Def. 10.2.6 der Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung, $s_i \geq t_3$ sein muss.

Somit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t_3) &= (u(s_0), \dots, u(s_{i-1}), u(t_3)) \\ &= (u(s_0), \dots, u(s_{i-1}), u(t_2)) = \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t_2). \end{aligned} \quad (12.3.4)$$

Die Voraussetzung an H liefert nun, dass (12.3.3) gilt.

- Wenn $u(t_2) \neq u(t_3)$:
 - Wenn $t_1 \geq s_{i-1}$ ist, dann ist, da u auf $[s_{i-1}, t_2]$ monotaffin ist, $u(t_1) \in \text{conv}(s_{i-1}, t_2)$. Also ist $(u(s_{i-1}), u(t_1), u(t_2))$ ein Konvexitätstripel. Nach Voraussetzung ist $(u(t_1), u(t_3), u(t_2))$ ebenfalls ein Konvexitätstripel. Wendet man jetzt die Aussage a) im Lemma 7.2.3 für $(u(s_{i-1}), u(t_1), u(t_3), u(t_2))$ an, dann ist auch $(u(s_{i-1}), u(t_3), u(t_2))$ ein Konvexitätstripel.
 - Wenn $t_1 < s_{i-1}$ und $u(t_1) = u(s_{i-1})$ ist, dann gilt nach Voraussetzung, dass $(u(s_{i-1}), u(t_3), u(t_2))$ ein Konvexitätstripel ist.
 - Wenn $t_1 < s_{i-1}$ und $u(t_1) \neq u(s_{i-1})$ ist, dann folgt mit der Monotaffinität von u auf $[t_1, t_2]$ und auf $[s_{i-2}, s_{i-1}]$, und der Tatsache, dass $s_{i-1} < t_2$ ist, dass man das Kor. 10.1.11 anwenden kann. Dies liefert dann, dass u auf $[s_{i-2}, t_2]$ monotaffin ist, was ein Widerspruch dazu ist, dass $s_{i-1} < t_2$ die maximale Zeit mit dieser Eigenschaft ist. Also kann der Fall $t_1 < s_{i-1}$ und $u(t_1) \neq u(s_{i-1})$ nicht eintreten.

Da $(u(s_{i-1}), u(t_3), u(t_2))$ ein Konvexitätstripel ist, folgt mit Hilfe von Lem. 7.2.4, dass $(u(s_{i-1}), u(t_2), u(t_3))$ kein Konvexitätstripel ist. Dann liefert das Lemma 10.1.9, dass u auf $[s_{i-1}, t_3]$ nicht monotaffin ist, und somit $s_i < t_3$ sein muss.

Wenn $u(t_2) \neq u(s_i)$ wäre, dann würde $t_2 < s_i < t_3$ sein. Würde man ausnutzen, dass u auf $[s_{i-1}, t_2]$ und auf $[t_2, t_3]$ monotaffin ist und dass $(u(s_{i-1}), u(t_2), u(t_3))$ kein Konvexitätstripel ist, dann würde man mit dem Kor. 10.1.12 folgern, dass u auf $[s_{i-1}, s_i]$ nicht monotaffin wäre, was ein Widerspruch wäre.

Somit ist $u(t_2) = u(s_i)$ und daher gilt

$$\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t_2) = (u(s_0), \dots, u(s_i)). \quad (12.3.5)$$

Da u auf $[t_2, t_3]$ und damit auch auf der Teilmenge $[s_i, t_3]$ monotaffin ist, folgt dass

$$\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t_3) = (u(s_0), \dots, u(s_i), u(t_3)). \quad (12.3.6)$$

Da $(u(s_{i-1}), u(t_3), u(t_2)) = (u(s_{i-1}), u(t_3), u(s_i))$ ein Konvexitätstripel ist, kann man für $(v_0, \dots, v_n) := (u(s_0), \dots, u(s_i))$ und $v = u(t_3)$ die Gleichung (12.3.1) anwenden. Kombiniert man dies mit (12.3.5) und (12.3.6), dann sieht man, dass (12.3.3) gilt.

\Rightarrow : Ang., es gibt $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ und $v \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \setminus \{v_n\}$, so dass (12.3.1) nicht gilt. Dann ist $V = (v_0, \dots, v_n, v) \in S_F(X_1)$, und $0 = \frac{0}{n+1}T < \frac{1}{n+1}T < \dots < \frac{n+1}{n+1}T = T$ ist die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ für $\pi_{\text{pw.af.}}[V]$. Somit folgt, dass

$$G(v_0, v_1, \dots, v_n, v) = \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]](T), \quad (12.3.7)$$

$$G(v_0, v_1, \dots, v_n) = \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.}}[V]]\left(\frac{n}{n+1}T\right). \quad (12.3.8)$$

12. Anwendungen des Darstellungssatzes für Hysterese-Operatoren

Für $t_1 = \frac{n-1}{n+1}T$, $t_2 = \frac{n}{n+1}T$ und $t_3 = T$ und $u := \pi_{\text{pw.af.}}[V]$ ist also u auf $[t_1, t_2]$ und auf $[t_2, t_3]$ stetig und monotaffin, und es ist $u(t_3) = v \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) = \text{conv}(u(t_1), u(t_2))$, aber die Gleichung (4.2.1) gilt nicht. Mit Hilfe der Def. 4.2.1 sieht man, dass H dann keine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} ist.

- b) Da $h : X \rightarrow Y$ genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} ist, wenn $H : Y \times X \times X$ mit $H(y, x_1, x_2) := y + h(x_1, x_2)$ für alle $y \in Y$ und alle $x_1, x_2 \in X$ eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} ist, folgt die Äquivalenz mit Hilfe der Aussage a).

□

Aus dem Lemma folgen unmittelbar die beiden folgenden Korollare:

12.3.2 Korollar. *Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist. Sei Z eine nichtleere Menge. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand in Z gegeben. Es sei $G : Z \times S_F(X_1) \rightarrow Y$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert, d.h. $G = \text{Gen}_{Z \times S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$.*

- a) *Eine Funktion $H : Y \times X \times X \rightarrow Y$, so dass $H(y, x, x) = y$ für alle $(y, x) \in Y \times X$ gilt, ist genau dann eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $z_0 \in Z$, $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ und alle $v \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \setminus \{v_n\}$ gilt, dass*

$$G(z_0, (v_0, v_1, \dots, v_n, v)) = H(G(z_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)), v_n, v). \quad (12.3.9)$$

- b) *Eine Funktion $h : X^2 \rightarrow Y$ mit $h(x_1, x_1) = 0$ für alle $x_1 \in X$ ist genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $z_0 \in Z$, alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ und alle $v \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \setminus \{v_n\}$ gilt, dass*

$$G(z_0, (v_0, \dots, v_n, v)) = G(z_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) + h(v_n, v). \quad (12.3.10)$$

12.3.3 Korollar. *Es sei Z eine nichtleere Teilmenge von Y . Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand in Z gegeben, der die Halbgruppeneigenschaft hat. Es sei $G : Z \times S_F(X_1) \rightarrow Y$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert, d.h. $G = \text{Gen}_{Z \times S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$.*

- a) *Durch $H(y, x_1, x_2) := G(y, (x_1, x_2))$ für alle $y \in Z$ und alle $x_1, x_2 \in X$ wird eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} definiert..*
- b) *Eine Funktion $h : X^2 \rightarrow Y$ mit $h(x_1, x_1) = 0$ für alle $x_1 \in X$ ist genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $z_0 \in Z$, alle $v_0, v_1 \in X_1$ mit $v_0 \neq v_1$ gilt*

$$G(z_0, (v_0, v_1)) = z_0 + h(v_0, v_1). \quad (12.3.11)$$

12.3.2. Umformulierung der abgeschwächten Form der ersten Madelungschen Regel

12.3.4 Lemma. *Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert, d.h. $G = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$. Für \mathcal{H} gilt die abgeschwächte Form der erste Madelungschen Regel, wie sie in Def. 12.1.3 formuliert wird, genau dann, wenn für alle $V = (v_0, \dots, v_n) \in S_F(X)$, alle $W = (w_0, \dots, w_m) \in S_F(X)$ mit*

$$v_n = w_m, \quad v_{n-1} \in \text{conv}(w_{m-1}, w_m), \quad (12.3.12)$$

gilt:

- Für alle $v \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \setminus \{v_{n-1}, v_n\}$, so dass

$$G(v_0, \dots, v_{n-1}, w) = G(w_0, \dots, w_{m-1}, w), \quad \forall w \in \text{conv}(v, v_n), \quad (12.3.13)$$

folgt, dass

$$G(v_0, \dots, v_n, v) = G(w_0, \dots, w_m, v). \quad (12.3.14)$$

- Wenn die Bedingungen

$$G(v_0, \dots, v_{n-1}) = \begin{cases} G(w_0, \dots, w_{m-1}), & \text{wenn } v_{n-1} = w_{m-1}, \\ G(w_0, \dots, w_{m-1}, v_{n-1}), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (12.3.15a)$$

$$G(v_0, \dots, v_{n-1}, w) = G(w_0, \dots, w_{m-1}, w), \quad \forall w \in \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \setminus \{v_{n-1}\}, \quad (12.3.15b)$$

erfüllt sind, dann folgt, dass

$$G(v_0, \dots, v_{n-1}, v_n, v_{n-1}) = G(w_0, \dots, w_{m-1}, w_m, v_{n-1}). \quad (12.3.16)$$

Beweis. Wenn man stetige, stückweise monotaffine Funktionen u und v betrachtet, welche die Voraussetzungen a)–d) in Def. 12.1.1 erfüllen, den Gedächtnis-Hysterese-Operator $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}$ auf $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ für diese Funktionen auswertet, dann erhält man genau die betrachteten Kombinationen von Strings.

Nutzt man nun die Funktion G , um die entsprechenden Werte von \mathcal{H} zu bestimmen, dann sieht man, dass die Bedingungen in Def. 12.1.3 gerade in die oben formulierten Bedingungen übergehen. \square

12.3.3. Umformulierung der Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion

12.3.5 Lemma. *Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert, d.h. $G = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$.*

12. Anwendungen des Darstellungssatzes für Hysterese-Operatoren

\mathcal{H} hat die Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion, wie sie in Def. 12.2.1 formuliert wird, genau dann, wenn für alle $V = (v_0, \dots, v_n) \in S_F(X)$, alle $W = (w_0, \dots, w_m) \in S_F(X)$ und alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k < n$, $k < m$ und

$$v_{n-i} = w_{m-i}, \quad \forall i = 0, \dots, k, \quad v_n \in \text{conv}(v_{n-k-1}, v_{n-k}) \cap \text{conv}(w_{m-k-1}, w_{m-k}), \quad (12.3.17)$$

gilt:

- Wenn $v_n \notin \text{conv}(v_{n-1}, v_{n-k})$, dann

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{conv}(v_n, v_{n-k}) \setminus \{v_n\} : \\ G(v_0, \dots, v_n, v) - G(v_0, \dots, v_n) = G(w_0, \dots, w_m, v) - G(w_0, \dots, w_m). \end{aligned} \quad (12.3.18)$$

- Wenn $v_n \in \text{conv}(v_{n-1}, v_{n-k})$, dann

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{conv}(v_n, v_{n-k}) \setminus \{v_n\} : \\ G(v_0, \dots, v_{n-1}, v) - G(v_0, \dots, v_n) = G(w_0, \dots, w_{m-1}, v) - G(w_0, \dots, w_m). \end{aligned} \quad (12.3.19)$$

Beweis. Wenn man stetige, stückweise monotaffine Funktionen u und v , welche die Voraussetzungen a)-c) in Def. 12.2.1 erfüllen, betrachtet, dann liefert der Gedächtnis-Hysterese-Operator $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}$ gerade die betrachteten Paare von Strings. Nutzt man jetzt die Darstellung von \mathcal{H} mit Hilfe von G aus, so sieht man die Äquivalenz der Bedingungen zu denen in Def. 12.2.1. \square

12.3.6 Definition. Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist.

a) Es sei

$$S_{F,\text{perio}}(X_1) := \{(w_0, \dots, w_m) \in S_F(X_1) \mid m \geq 2, w_0 \notin \text{conv}(w_m, w_1)\}. \quad (12.3.20)$$

b) Es sei $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator und es sei $G = \text{Gen}_{S_F(X_1)}(\mathcal{H})$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert.

Eine Funktion $U : S_{F,\text{perio}}(x_1) \times]0, 1] \rightarrow Y$ ist die *Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion* von \mathcal{H} , wenn für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$, so dass es ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $2 \leq k < n$ gibt, so dass die Bedingungen

$$(v_{n-k}, \dots, v_n) \in S_{F,\text{perio}}(X) \text{ und } v_n \in \text{conv}(v_{n-k-1}, v_{n-k}) \quad (12.3.21)$$

erfüllt sind, folgt dass

- Wenn $v_n \notin \text{conv}(v_{n-1}, v_{n-k})$, dann gilt für alle $\lambda \in]0, 1]$:

$$G(v_0, \dots, v_n, (1 - \lambda)v_n + \lambda v_{n-k}) - G(v_0, \dots, v_n) = U((v_{n-k}, \dots, v_n), \lambda). \quad (12.3.22)$$

- Wenn $v_n \in \text{conv}(v_{n-1}, v_{n-k})$, dann gilt für alle $\lambda \in]0, 1[$:

$$G(v_0, \dots, v_{n-1}, (1 - \lambda)v_n + \lambda v_{n-k}) - G(v_0, \dots, v_n) = U((v_{n-k}, \dots, v_n), \lambda). \quad (12.3.23)$$

- c) Es seien eine nichtleere Menge Z und $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit Anfangszustand in Z gegeben. Eine Funktion $U : S_{\text{alt,perio}} \times [0, 1] \rightarrow Y$ ist die *Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion* von \mathcal{H} , wenn U für alle $z \in Z$ die Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{H}[z, \cdot]$ ist.

Kombiniert man das letzte Lemma und die Definition, dann folgt:

12.3.7 Korollar. *Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist.*

- a) *Sei $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator. Dann hat \mathcal{H} die Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion genau dann, wenn es die Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} gibt.*
- b) *Es sei Z eine nichtleere Menge. Sei $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit Anfangszustand in Z . Dann hat \mathcal{H} die Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion genau dann, wenn es die Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} gibt.*

Beweis. Es seien $V = (v_0, \dots, v_n) \in S_F(X)$ und $W = (w_0, \dots, w_m) \in S_F(X)$ gegeben, so dass es ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k < n$, $k < m$ und (12.3.17) gibt.

Es ist $v_n \neq v_{n-k}$, $v_n \in \text{conv}(v_{n-k-1}, v_{n-k})$ und $(v_{n-k-1}, v_{n-k}, v_{n-k+1})$ ist kein Konvexitätstripel. Wenn $(v_n, v_{n-k}, v_{n-k+1})$ ein Konvexitätstripel wäre, würde die Anwendung des Lemmas 7.2.3c) auf $(v_{n-k-1}, v_n, v_{n-k}, v_{n-k+1})$ liefern, dass $(v_{n-k-1}, v_{n-k}, v_{n-k+1})$ ein Konvexitätstripel wäre, d.h. wir würden einen Widerspruch erhalten.

Also ist $(v_n, v_{n-k}, v_{n-k+1})$ kein Konvexitätstripel, und somit gilt

$$(v_{n-k}, v_{n-k+1}, \dots, v_n) = (w_{m-k}, w_{m-k+1}, \dots, w_m) \in S_{F,\text{perio}}(X_1). \quad (12.3.24)$$

Man sieht jetzt, dass die Gültigkeit von (12.3.18) bzw. (12.3.19) liefert, dass man (12.3.22) bzw. (12.3.23) für $k = n$ benutzen kann, um U mit den gewünschten Eigenschaften zu definieren.

Andererseits, folgt aus (12.3.22) bzw. (12.3.23) unmittelbar, dass (12.3.18) bzw. (12.3.19) erfüllt sind.

Dies liefert insgesamt in a) die Äquivalenz der Bedingungen in Lemma 12.3.5 und der Existenz der Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} wie in der Def. 12.3.6. Die Aussage in b) folgt unmittelbar aus a). \square

12.3.8 Lemma. *Es sei Z eine nichtleere Teilmenge von Y . Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : Z \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ mit Anfangszustand in Z gegeben, der die Halbgruppeneigenschaft hat. Es sei $G : Z \times S_F(X_1) \rightarrow Y$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert, d.h. $G = \text{Gen}_{Z \times S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$.*

Ein Funktional $U : S_{F,\text{perio}}(X_1) \times [0, 1] \rightarrow Y$ ist genau dann die Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_{F,\text{perio}}(X_1)$ gilt:

12. Anwendungen des Darstellungssatzes für Hysterese-Operatoren

- Wenn $v_n \notin \text{conv}(v_{n-1}, v_{n-k})$, dann gilt für alle $\lambda \in]0, 1]$ und alle $z_0 \in Z$

$$\begin{aligned} & G(z_0, (v_n, v_0, v_1, \dots, v_n, (1-\lambda)v_n + \lambda v_0)) - G(z_0, (v_n, v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= U((v_0, \dots, v_n), \lambda). \end{aligned} \quad (12.3.25)$$

- Wenn $v_n \in \text{conv}(v_{n-1}, v_{n-k})$, dann gilt für alle $\lambda \in]0, 1]$ und alle $z_0 \in Z$

$$\begin{aligned} & G(z_0, (v_n, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, (1-\lambda)v_n + \lambda v_0)) - G(z_0, (v_n, v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= U((v_0, \dots, v_n), \lambda). \end{aligned} \quad (12.3.26)$$

Beweis. Schreibt man die Bedingungen in Def. 12.3.6 mit Hilfe der Halbgruppeneigenschaft um, so erhält man die oben ausformulierten Bedingungen. \square

12.3.9 Lemma. Es sei $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator und es sei $G = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert.

Dann bildet \mathcal{H} genau dann im Sinne der Def. 12.2.3 periodische Input-Funktionen auf periodische Output-Funktionen ab, wenn für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$, so dass es ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $2 \leq k < n$ gibt, so dass die Bedingungen (12.3.21) erfüllt ist, gilt dass

$$G(v_0, \dots, v_n) = G(v_0, \dots, v_n, v_{n-k}, \dots, v_n). \quad (12.3.27)$$

Beweis. Betrachtet man Input-Funktionen, die über zwei Perioden die gleiche Kurve beschreiben, so liefert der Gedächtnis-Hysterese-Operator $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}$ gerade die betrachteten Paare von Strings am Ende der ersten und am Ende der zweiten Periode. \square

12.4. Level-Funktionen

12.4.1. Definition von Level-Funktionen

Die folgende Definition von Level-Funktionen ist von [8, Def. 2.2.14] inspiriert. Um aber Eigenschaften wie Monotaffinität für die Level-Funktionen formulieren zu können, war es notwendig, diese Level-Funktionen als Funktionen auf den reellen Zahlen zu formulieren. Eine direkte Übernahme der Definition in [8, Def. 2.2.14] hätte zu Funktionen auf X_1 geführt, deren Definition einfacher gewesen wäre.

12.4.1 Definition. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.

- a) Für $V \in S(X_1)$ mit $V = (v_0, v_1)$ ist die *Level-Funktion* $\text{lev}_{\mathcal{H}, V} : [0, 1] \rightarrow Y$ von \mathcal{H} definiert durch

$$\text{lev}_{\mathcal{H}, V}(r) := \text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (v_0, (1-r)v_0 + rv_1) \quad \forall r \in [0, 1]. \quad (12.4.1)$$

- b) Für $V = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in S(X_1)$ mit $n > 1$ ist die *Level-Funktion* $\text{lev}_{\mathcal{H}, V} : [0, 1] \rightarrow Y$ von \mathcal{H} definiert durch

$$\text{lev}_{\mathcal{H}, V}(r) := \begin{cases} \text{Gen}_{S(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (v_0, \dots, v_{n-1}), & \text{wenn } r = 0, \\ (v_0, \dots, v_{n-1}, (1-r)v_{n-1} + rv_n), & \text{wenn } r \in]0, 1]. \end{cases} \quad (12.4.2)$$

c) Die *Level-Funktionen* von \mathcal{H} sind alle $\text{lev}_{\mathcal{H},V}$ mit $V \in S(X_1)$ beliebig.

12.4.2 Lemma. *Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u . Dann gilt*

$$\mathcal{H}[u](t) = \text{lev}_{\mathcal{H},(u(t_0), u(t_1))}(\text{Para}_{[t_0, t_1]}[u](t)), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (12.4.3)$$

wobei $\text{Para}_{[t_0, t_1]}[u]$ die Parametrisierung von u auf $[t_0, t_1]$ ist, und für alle $2 \leq i \leq n$ gilt

$$\mathcal{H}[u](t) = \text{lev}_{\mathcal{H},(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_i))}(\text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t)), \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (12.4.4)$$

wobei $\text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u]$ die Parametrisierung von u auf $[t_{i-1}, t_i]$ ist.

Beweis. Nach (11.1.7a), Def. 10.1.6 und (10.1.1) ist für $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[u](t) &= G(u(0), u(t)) = G(u(0), (1 - \text{Para}_{[t_0, t_1]}[u](t))u(t_0) + \text{Para}_{[t_0, t_1]}[u](t)u(t_1)) \\ &= \text{lev}_{\mathcal{H},(u(t_0), u(t_1))}(\text{Para}_{[t_0, t_1]}[u](t)). \end{aligned} \quad (12.4.5)$$

Für $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $2 \leq i \leq n$ und $t \in [t_{i-1}, t_i]$ gilt nach (11.1.7b), Def. 10.1.6 und (10.1.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[u](t_{i-1}) &= G(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{i-1})) = \text{lev}_{\mathcal{H},(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_i))}(0) \\ &= \text{lev}_{G,(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_i))}(\text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t_{i-1})), \end{aligned} \quad (12.4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[u](t) &= G(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{i-1}), u(t)) \\ &= G\left(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{i-1}), \right. \\ &\quad \left. (1 - \text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t))u(t_{i-1}) + (\text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t))u(t_i)\right) \\ &= \text{lev}_{\mathcal{H},(u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_i))}(\text{Para}_{[t_{i-1}, t_i]}[u](t)). \end{aligned} \quad (12.4.7)$$

□

Dank des Lemmas ist es sinnvoll, die folgende Definition zu formulieren, die von [8, Def. 2.2.14] inspiriert ist.

12.4.3 Definition. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.

- a) Man sagt, dass der *Operator nur stetige Level-Funktionen hat*, wenn für jedes $V \in S_F(X_1)$ gilt, dass die Level-Funktion $\text{lev}_{\mathcal{H},V}$ stetig ist.
- b) Man sagt, dass der *Operator nur monotaffine Level-Funktionen hat*, wenn für alle $V \in S_F(X_1)$ gilt, dass die Level-Funktion $\text{lev}_{\mathcal{H},V}$ monotaffin ist.
- c) Man sagt, dass der *Operator nur stückweise monotaffine Level-Funktionen hat*, wenn für alle $V \in S_F(X_1)$ gilt, dass die Level-Funktion $\text{lev}_{\mathcal{H},V}$ stückweise monotaffin ist.

12.4.4 Bemerkung. Für jeden Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pm}}[0, T] \rightarrow \text{Map}([0, T], \mathbb{R})$ gilt:

12. Anwendungen des Darstellungssatzes für Hysterese-Operatoren

- a) Der Operator ist *PIECEWISE C^0* im Sinne von [8, Def. 2.2.14] genau dann, wenn er im Sinne der obigen Definition nur stetige Level-Funktionen hat.
- b) Wenn der Operator *PIECEWISE MONOTONE* im Sinne von [8, Def. 2.2.14], dann hat er im Sinne der obigen Definition nur monotaffine Level-Funktionen.
- c) Es gilt aber: Auch wenn der Operator nur monotaffine Level-Funktionen hat, muss er nicht zwangsläufig *PIECEWISE MONOTONE* im Sinne von [8, Def. 2.2.14] sein.

Da die Parametrisierungen stetige, monotone Funktionen sind, liefert das Lemma 12.4.2:

12.4.5 Korollar. *Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.*

- a) *Dann hat der Operator genau dann nur stetige Level-Funktionen, wenn $\mathcal{H}[u]$ für alle $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ stetig ist.*
- b) *Wenn \mathcal{H} nur monotaffine Level-Funktionen hat, dann folgt für alle $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ und alle $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2$, so dass u auf $[t_1, t_2]$ monotaffin ist, dass $\mathcal{H}[u]$ auf $[t_1, t_2]$ monotaffin ist.*
- c) *Wenn \mathcal{H} nur monotaffine Level-Funktionen hat, dann ist jede Monotaffinitäts-Zerlegung von $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ auch eine Monotaffinitäts-Zerlegung von $\mathcal{H}[u]$.*
- d) *Wenn \mathcal{H} nur stückweise monotaffine Level-Funktionen hat, dann gilt für alle $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$, dass $\mathcal{H}[u]$ eine stückweise monotaffine Funktion ist.*

12.4.6 Lemma. *Es sei X_1 eine nichtleere und konvexe Teilmenge von X . Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben, und es sei $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ die Funktion, die den Operator \mathcal{H} generiert. Dann hat \mathcal{H} genau dann ein lokales Gedächtnis, wenn $\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (V) = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (W)$ für alle $V = (v_0, \dots, v_n)$ und $W = (w_0, \dots, w_m)$ in $S_F(X_1)$ gilt, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:*

- i) *Es ist es gibt ein $0 \leq k < \min\{n, m\}$, so dass*

$$v_{n-i} = w_{m-i} \quad \forall 0 \leq i \leq k. \quad (12.4.8)$$

- ii) *Es gibt $\lambda, \gamma \in [0, 1]$ mit*

$$\text{lev}_{\mathcal{H}, (v_0, \dots, v_{n-k})}(\lambda) = \text{lev}_{\mathcal{H}, (w_0, \dots, w_{m-k})}(\gamma). \quad (12.4.9)$$

Beweis. Es seien stetige, stückweise monotaffine Funktionen u und v , und $t_a, t_b \in [0, T]$ gegeben, so dass

$$t_a < t_b, \quad \mathcal{H}[u](t_a) = \mathcal{H}[v](t_a), \quad u(t) = v(t), \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (12.4.10)$$

Es seien $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ und $0 = s_0 < \dots < s_m = T$ die Standard-Monotaffinitätszerlegungen von $[0, T]$ für u und v . Wegen der Kausalität von \mathcal{H} kann man o.B.d.A. annehmen, dass t_b in $]t_{n-1}, t_n]$ und in $]s_{m-1}, s_m]$ liegt.

Es sei i_0 minimal so, dass $t_a < t_{i_0}$ und k_0 minimal so, dass $t_a < s_{k_0}$ ist. Dann ist $n - i_0 = m - k_0 \geq 0$ und es gilt für $j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $j \leq n - i_0$, dass $u(t_{n-j}) = v(s_{m-j})$ ist. Weiterhin liegt t_a in $[t_{i_0-1}, t_{i_0}]$ und in $[s_{j_0-1}, s_{j_0}]$

Das Lemma 12.4.2 liefert nun, dass

$$\text{lev}_{\mathcal{H},(u(t_0),\dots,u(t_{i_0}))}(\text{Para}_{[t_{i_0-1},t_{i_0}]}[u](t_a)) = \text{lev}_{\mathcal{H},(v(t_0),\dots,v(t_{j_0}))}(\text{Para}_{[s_{j_0-1},s_{j_0}]}[v](t_a)). \quad (12.4.11)$$

Somit bilden

$$W = \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t_b) = (u(t_0), \dots, u(t_{n-1}), u(t_b)) \text{ und} \\ V = \mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[v](t_b) = (v(t_0), \dots, v(t_{m-1}), v(t_b))$$

gerade genau so ein Paar, wie es oben betrachtet wird, und es ist $\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (W) = \mathcal{H}[u](t_b)$ und $\text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle (V) = \mathcal{H}[v](t_b)$. \square

12.4.2. Level-Funktionen und Aktualisierungsfunktionen

Mit Hilfe der Level-Funktionen erhält man aus dem Lemma 12.3.1:

12.4.7 Korollar. *Es sei vorausgesetzt, dass Y ein Vektorraum ist. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.*

a) *Eine Funktion $H : Y \times X \times X \rightarrow Y$, so dass $H(y, x, x) = y$ für alle $(y, x) \in Y \times X$ gilt, ist genau dann eine Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ und $V := (v_0, \dots, v_n, v_{n-1})$ gilt:*

Wenn $V \neq (v_0, v_0, v_0)$ ist, dann gilt für alle $\lambda \in]0, 1]$:

$$\text{lev}_{\mathcal{H},V}(\lambda) = H(\text{lev}_{\mathcal{H},V}(0), v_n, (1 - \lambda)v_n + \lambda v_{n-1}). \quad (12.4.12)$$

b) *Eine Funktion $h : X^2 \rightarrow Y$ mit $h(x_1, x_1) = 0$ für alle $x_1 \in X$ ist genau dann eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion von \mathcal{H} , wenn für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X_1)$ und $V := (v_0, \dots, v_n, v_{n-1})$ gilt:*

Wenn $V \neq (v_0, v_0, v_0)$ ist, dann gilt für alle $\lambda \in]0, 1]$:

$$\text{lev}_{\mathcal{H},V}(\lambda) = \text{lev}_{\mathcal{H},V}(0) + h(v_n, (1 - \lambda)v_n + \lambda v_{n-1}). \quad (12.4.13)$$

12.5. Vergessen von Entfernungsvorgängen

12.5.1. Vergessen des Entfernens von Konvexitätstrippelmitten

12.5.1 Bemerkung. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert, d.h. $G = \text{Gen}_{S_F(X_1)} \langle \mathcal{H} \rangle$.

Dann gilt nach Satz 9.1.3, dass G das Entfernen von Konvexitätstrippelmitten vergisst.

12.5.2. Vergessen des Entferns von Madelung-Zyklen

In [5, Sec. 4] und [8, Sec. 2.6] wird die Gültigkeit der zweiten und dritten Madelungschen Regel für Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen darauf zurückgeführt, dass man zeigen muss, dass die vom Operator generierte Funktion die Entfernung von Madelung-Zyklen vergisst, vgl. [8, Def. 2.6.1], [8, Def. 2.6.2 and Def. 2.7.1], [54, S. 51], oder Def. 5.3.3.

Da man für einen Hysterese-Operator, der auf den stetigen, stückweise monotaffinen Funktionen definiert ist, den Operator mit Hilfe der generierten Funktion eindeutig beschreiben kann, kann man die folgende Definition formulieren:

12.5.2 Definition. a) Es sei eine Abbildung $G : S_F(X_1) \rightarrow Y$ gegeben. Man sagt, dass die *Abbildung die Entfernung von Madelungzyklen vergisst*, wenn für alle $V, W \in S_F(X_1)$ so dass W aus V durch die Entfernung der Mitte eines Madelungzyklus gebildet wird, gilt, dass $G(V) = G(W)$ ist.

b) Es sei $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator. Dann sagt man, dass \mathcal{H} *die Entfernung von Madelungzyklen vergisst*, wenn $\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{H} \rangle$ die Entfernung von Madelungzyklen vergisst.

Analog zum Lemma 5.3.6 gilt:

12.5.3 Lemma. *Es sei $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator. Dann vergisst der Operator \mathcal{H} die Entfernung von Mitten von Madelungzyklen genau dann, wenn für den Operator im Sinne der Def. 12.1.5 die zweite und die dritte Madelungsche Regel gelten.*

Beweis. Betrachtet man u und v wie in der Formulierung der dritten Madelungschen Regel in Def. 12.1.5b), dann sieht man, dass für alle $t \geq t_4$ gilt, dass man $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[v](t)$ aus $\mathcal{M}_{S_F(X_1)}^{\text{pw.mo.af.}}[u](t)$ durch das Entfernen der Mitte eines Madelungzyklus erhalten kann. Somit gelten die zweite und die dritte Madelungschen Regel für \mathcal{H} genau dann, wenn der Operator die Entfernung von Madelungzyklen vergisst. \square

13. Beispiele für von Hysterese-Operatoren mit vektorwertigen Input-Funktionen generierten Funktionen auf Strings

13.1. Vektorielle RELAY-Operatoren

13.1.1. Die String-Darstellung des verallgemeinerten vektoriellen RELAY-Operator aus Abschnitt 6.1.10

Die Aussagen a) und c) im nachfolgenden Lemma und die zugehörigen Beweise sind eine überarbeitete Übersetzung der Ausführungen des Autors in [27].

13.1.1 Lemma. *Es sei ein topologischer Vektorraum X gegeben. Es sei eine Funktion $\zeta : X \setminus \Omega \rightarrow \Lambda$ gegeben, wobei Ω eine offene, nichtleere Teilmenge von X und Λ eine nichtleere Teilmenge von X ist.*

Für den verallgemeinerten RELAY-Operator

$$\mathcal{R}_\zeta^{gen} : \Lambda \times C([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], \Lambda)$$

aus Def. 6.1.17 und seine Einschränkung $\mathcal{R}_\zeta^{gen, pw.mo.af.}$ auf $\Lambda \times C_{pw.mo.af.}([0, T]; X)$ gilt dann:

a) *Für $\lambda_0 \in \Lambda$ und $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(X)$ ist*

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_F(X)} \left\langle \mathcal{R}_\zeta^{gen, pw.mo.af.} \right\rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) = \text{Gen}_{S_F(X)} \left\langle \mathcal{R}_\zeta^{gen} \right\rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ & = \begin{cases} \zeta(v_n), & \text{wenn } v_n \notin \Omega, \\ \lambda_0, & \text{wenn } \text{conv}(v_i, v_{i+1}) \subseteq \Omega, \quad \forall i = 0, \dots, n-1, \\ \zeta((1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1}) & \text{mit} \\ \quad k := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \text{conv}(v_i, v_{i+1}) \not\subseteq \Omega\}, \\ \quad \chi_{\max} := \max\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1} \notin \Omega\}, \\ \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \tag{13.1.1}$$

13. Bsp. für von Hyst.-Operat. mit vektorwertigen Input-Fkt. generierten Fkt. auf Strings

und auch noch

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} \zeta(v_n), & \text{wenn } v_n \notin \Omega, \\ \lambda_0, & \text{wenn } n = 1, \quad \text{conv}(v_0, v_1) \subseteq \Omega, \\ \text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), & \text{wenn } n > 1, \quad \text{conv}(v_{n-1}, v_n) \subseteq \Omega, \\ \zeta((1 - \chi_{\max})v_{n-1} + \chi_{\max}v_n) & \text{mit} \\ \chi_{\max} := \max\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)v_{n-1} + \chi v_n \notin \Omega\}, \\ \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.2)$$

b) Es ist $h_{\mathcal{R}, \zeta}^{\text{gen}} : X \times X \rightarrow Y$ mit

$$h_{\mathcal{R}, \zeta}^{\text{gen}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \zeta(x_2) - \zeta(x_1), & \text{wenn } \text{conv}(x_1, x_2) \cap \Omega = \emptyset, \\ 0, & \text{wenn } \text{conv}(x_1, x_2) \subseteq \Omega, \\ \zeta((1 - \chi_{\max})x_1 + \chi_{\max}x_2) - \zeta((1 - \chi_{\min})x_1 + \chi_{\min}x_2) & \text{mit} \\ \chi_{\max} := \max\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)x_1 + \chi x_2 \notin \Omega\}, \\ \chi_{\min} := \min\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)x_1 + \chi x_2 \notin \Omega\}, \\ \text{sonst,} \end{cases} \quad (13.1.3)$$

die additive Umkehrbereichs-Aktualisierungsfunktionen von $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}, \text{pw. mo. af}}$.

c) $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}, \text{pw. mo. af}}$ vergisst das Entfernen von Madelung-Zyklen.

d) Es ist $U_{\mathcal{R}, \zeta}^{\text{gen}} : S_{F, \text{perio}}(X_1) \times]0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$\begin{aligned} & U_{\mathcal{R}, \zeta}^{\text{gen}}((v_0, v_1, \dots, v_n), \lambda) \\ &= \begin{cases} \zeta((1 - \lambda)v_n + \lambda v_0) - \zeta(v_n), & \text{wenn } v_n \notin \Omega, (1 - \lambda)v_n + \lambda v_0 \notin \Omega, \\ 0, & \text{wenn } (1 - \gamma)v_n + \gamma v_0 \in \Omega, \quad \forall \gamma \in [0, \lambda], \\ \zeta((1 - \gamma_{\max})v_n + \gamma_{\max}v_0) - \zeta((1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1}) & \text{mit} \\ \gamma_{\max} := \max\{\chi \in [0, \lambda] \mid (1 - \gamma)v_n + \gamma v_0 \notin \Omega\}, \\ k := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \text{conv}(v_i, v_{i+1}) \not\subseteq \Omega\}, \\ \chi_{\max} := \max\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1} \notin \Omega\}, \\ \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.4)$$

die Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}, \text{pw. mo. af}}$.

e) Für $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}, \text{pw. mo. af}}$ gelten die drei Madelungschen Regeln im Sinne der Definitionen 12.1.2 und 12.1.5. $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}, \text{pw. mo. af}}$ hat die die Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion im Sinne der Def. 12.2.1.

Beweis. a) Es seien $\lambda_0 \in \Lambda$ und $V = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(X)$ gegeben. Die erste Gleichung in (13.1.1) folgt aus der Definition von $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}, \text{pw.mo.af.}}$ und aus Def. 9.2.1. Aus dieser Definition und (6.1.16) ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (V) &= \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}}[\lambda_0, \pi_{\text{pw.af.}}[V]](T) \\ &= \begin{cases} \zeta(\pi_{\text{pw.af.}}[V](T)), & \text{wenn } \pi_{\text{pw.af.}}[V](T) \notin \Omega, \\ \lambda_0, & \text{wenn } \pi_{\text{pw.af.}}[V](s) \in \Omega, \quad \forall s \in [0, T], \\ \zeta\left(\pi_{\text{pw.af.}}[V]\left(\max\{s \in [0, T] \mid \pi_{\text{pw.af.}}[V](s) \notin \Omega\}\right)\right), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.5)$$

- Wenn $v_n \notin \Omega$ ist, dann ist $\pi_{\text{pw.af.}}[V](T) = v_n \notin \Omega$. Aus (13.1.5) folgt, dass

$$\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (V) = \zeta(\pi_{\text{pw.af.}}[V](T)) = \zeta(v_n).$$

- Wenn $\text{conv}(v_i, v_{i+1}) \subseteq \Omega$ für alle $i = 0, \dots, n-1$ gilt, dann folgt dass $\pi_{\text{pw.af.}}[V](t) \in \Omega$ für alle $t \in [0, T]$ gilt.

Benutzt man nun (13.1.5), so ergibt sich dass

$$\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (V) = \lambda_0.$$

- Wenn keiner der beiden obigen Fälle gilt, sieht man, dass die Formel für k in (13.1.1) ein k liefert, so dass

$$\text{conv}(v_k, v_{k+1}) \not\subseteq \Omega, \quad \text{conv}(v_i, v_{i+1}) \subseteq \Omega, \quad \forall i = k+1, \dots, n-1. \quad (13.1.6)$$

Daraus folgt, dass

$$\pi_{\text{pw.af.}}[V]\left(\left[\frac{k}{n}T, \frac{k+1}{n}T\right]\right) \not\subseteq \Omega, \quad \pi_{\text{pw.af.}}[V]\left(\left[\frac{k+1}{n}T, T\right]\right) \subseteq \Omega. \quad (13.1.7)$$

Verwenden wir nun (13.1.6), dann sieht man, dass die Menge

$$M := \{\chi \in [0, 1] \mid (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1} \notin \Omega\} \quad (13.1.8)$$

nicht leer ist. Sei $\chi_{\max} := \sup M$. Weil sowohl die Multiplikation mit einem Skalar als auch die Addition stetig sind, folgt, dass eine Folge, die im Komplement von Ω liegt, gegen $(1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1}$ konvergiert. Da Ω aber eine offene Menge ist, folgt, dass $(1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1} \notin \Omega$. Da sich aus (13.1.7) ergibt, dass $v_{k+1} \in \Omega$, erkennt man somit, dass χ_{\max} in M liegt, und daher wie in (13.1.1) definiert werden kann.

Weiterhin gilt noch für $t^* := (1 - \chi_{\max})\frac{k}{n}T + \chi_{\max}\frac{k+1}{n}T$, dass

$$\pi_{\text{pw.af.}}[V](t^*) \notin \Omega, \quad \pi_{\text{pw.af.}}[V]\left(\left[t^*, \frac{k+1}{n}T\right]\right) \subseteq \Omega. \quad (13.1.9)$$

Kombiniert man diese mit (13.1.5), so folgt, dass

$$\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (V) = \zeta(\pi_{\text{pw.af.}}[V](t^*)) = \zeta((1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1}). \quad (13.1.10)$$

- b) Dank der Aussage a) erlaubt es das Kor. 12.3.3, die Aussage b) zu beweisen.
- c) Es seien $V = (v_0, \dots, v_n) \in S_F(X)$ und $W = (w_0, \dots, w_{n-2}) \in S_F(X)$ mit $n > 2$ gegeben, so dass W aus V durch die Entfernung eines Madelungzyklus gebildet wird. Dann gibt es nach Def. 7.4.1 und Bem. 7.4.4 ein $j \in \{1, \dots, n-2\}$, so dass

$$\text{conv}(v_k, v_{k+1}) \subseteq \text{conv}(v_{k-1}, v_{k+2}), \quad v_k \notin \text{conv}(v_{k-1}, v_{k+1}), \quad v_{k+1} \notin \text{conv}(v_k, v_{k+2}), \quad (13.1.11)$$

$$w_i = v_i, \quad \forall i = 0, \dots, k-1, \quad w_j = v_{j+2}, \quad \forall j = k, \dots, n-2, \quad (13.1.12)$$

$$\text{conv}(v_{k-1}, v_{k+2}) = \text{conv}(v_{k-1}, v_k) \cup \text{conv}(v_{k+1}, v_{k+2}), \quad (13.1.13)$$

$$\text{conv}(v_k, v_{k+1}) = \text{conv}(v_{k-1}, v_k) \cap \text{conv}(v_{k+1}, v_{k+2}). \quad (13.1.14)$$

- Wenn $v_n \notin \Omega$ gilt, dann folgt mit (13.1.1) und (13.1.12), dass

$$\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (V) = \zeta(v_n) = \zeta(w_{n-2}) = \text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (W).$$

- Wenn $\text{conv}(v_i, v_{i+1}) \subseteq \Omega$ für alle $i = 0, 1, \dots, n-1$ gilt, dann folgt nach (13.1.12) und (13.1.13), dass $\text{conv}(w_i, w_{i+1}) \subseteq \Omega$ für alle $i = 0, \dots, n-2$ gilt. Mit (13.1.1) ergibt sich nun, dass $\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (V) = \eta = \text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (W)$.
- Andernfalls seien χ_{\max} und k definiert wird in (13.1.1), und es sei

$$v^* := (1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1}. \quad (13.1.15)$$

Dann folgt, dass (13.1.6) gilt, und dass

$$\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (V) = \zeta(v^*) \quad (13.1.16)$$

erfüllt ist.

Wenn $k < j-1$ ist, oder wenn $k \geq j+2$ ist, dann folgt unter Verwendung von aus (13.1.1), und (13.1.12), dass $\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (V) = \text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (W)$.

Mit (13.1.14), erhalten wir, dass

$$\text{conv}(v_j, v_{j+1}) \subseteq \text{conv}(v_{j+1}, v_{j+2}). \quad (13.1.17)$$

Nutzt man nun (13.1.6), dann erkennen wir, dass

$$\text{conv}(v_k, v_{k+1}) \not\subseteq \Omega, \quad \text{conv}(v_{k+1}, v_{k+2}) \subseteq \Omega. \quad (13.1.18)$$

Somit ergibt sich, dass die Annahme $k = j$ dazu führt, dass einerseits $\text{conv}(v_j, v_{j+1})$ als Teilmenge von $\text{conv}(v_{j+1}, v_{j+2}) = \text{conv}(v_{k+1}, v_{k+2})$ eine Teilmenge von Ω ist, aber andererseits $\text{conv}(v_j, v_{j+1}) = \text{conv}(v_k, v_{k+1})$ keine Teilmenge von Ω ist. Also führt die Annahme, dass $k = j$ gilt, zu einem Widerspruch, und es muss daher $k \neq j$ sein.

Daher bleibt noch die Fälle $k = j-1$ und $k = j+1$ zu untersuchen.

Verwendet man (13.1.12) und (13.1.13), so erhält man

$$\begin{aligned} \text{conv}(w_{j-1}, w_j) &= \text{conv}(v_{j-1}, v_{j+2}) \\ &= \text{conv}(v_{j-1}, v_j) \cup \text{conv}(v_{j+1}, v_{j+2}) \supseteq \text{conv}(v_k, v_{k+1}). \end{aligned} \quad (13.1.19)$$

Durch (13.1.6) und (13.1.12) ergibt sich, dass

$$\text{conv}(w_{j-1}, w_j) \not\subseteq \Omega, \quad \text{conv}(w_i, w_{i+1}) \subseteq \Omega, \quad \forall i = j, \dots, n-3. \quad (13.1.20)$$

Benutzt man (13.1.1), so folgt dass für $\beta \in [0, 1[$ und $w^* \in X$ definiert durch

$$\beta := \max\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)w_{j-1} + \chi w_j \notin \Omega\}, \quad (13.1.21)$$

$$w^* := (1 - \beta)w_{j-1} + \beta w_j, \quad (13.1.22)$$

gilt, dass

$$\text{Gen}_{S_F(X)} \langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \rangle (W) = \zeta(w^*). \quad (13.1.23)$$

Die Anwendung von (13.1.12) liefert, dass

$$\beta = \max\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)v_{j-1} + \chi v_{j+2} \notin \Omega\}, \quad (13.1.24)$$

$$w^* = (1 - \beta)v_{j-1} + \beta v_{j+2} \notin \Omega. \quad (13.1.25)$$

Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass $v^* = w^*$ gilt.

– Wenn $k = j - 1$ ist:

Wegen (13.1.19) gibt ein $\lambda \in [0, 1]$, so dass

$$v_{k+1} = (1 - \lambda)v_{j-1} + \lambda v_{j+2}. \quad (13.1.26)$$

Mit Hilfe von (13.1.6) ergibt sich nun, dass

$$\text{conv}(v_{j+1}, v_{j+2}) = \text{conv}(v_{k+2}, v_{k+3}) \subseteq \Omega$$

und $v_{k+1} \in \Omega$. Da $w^* \notin \Omega$, folgt aus (13.1.13) und (13.1.26), dass

$$\begin{aligned} w^* &\in \text{conv}(v_{j-1}, v_{j+2}) \setminus \Omega = (\text{conv}(v_{j-1}, v_j) \cup \text{conv}(v_{j+1}, v_{j+2})) \setminus \Omega \\ &= \text{conv}(v_{j-1}, v_j) \setminus \Omega \subseteq \text{conv}(v_{j-1}, v_{k+1}) \setminus \{v_{k+1}\} \\ &= \text{conv}(v_{j-1}, (1 - \lambda)v_{j-1} + \lambda v_{j+2}) \setminus \{(1 - \lambda)v_{j-1} + \lambda v_{j+2}\}. \end{aligned} \quad (13.1.27)$$

Benutzt man nun (13.1.25) und (13.1.26), dann folgt, dass $\beta < \lambda$.

Mit Hilfe von (13.1.26), erkennt man nun, dass für alle $\chi \in [0, 1]$ die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} &(1 - \lambda\chi)v_{j-1} + \lambda\chi v_{j+2} \\ &= (1 - \chi)v_{j-1} + \chi((1 - \lambda)v_{j-1} + \lambda v_{j+2}) = (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1}. \end{aligned} \quad (13.1.28)$$

13. Bsp. für von Hyst.-Operat. mit vektorwertigen Input-Fkt. generierten Fkt. auf Strings

Kombiniert man die Definition von χ_{\max} in (13.1.1) und (13.1.15), so ergibt sich, dass

$$(1 - \lambda\chi_{\max})v_{j-1} + \lambda\chi_{\max}v_{j+2} = (1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1} = v^* \notin \Omega, \quad (13.1.29)$$

$$(1 - \lambda\chi)v_{j-1} + \lambda\chi v_{j+2} = (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1} \in \Omega, \quad \forall \chi \in]\chi_{\max}, 1[. \quad (13.1.30)$$

Aus (13.1.24) folgt nun, dass

$$\lambda\chi_{\max} \leq \beta \notin]\chi_{\max}\lambda, \lambda[. \quad (13.1.31)$$

Da bereits gezeigt wurden, dass $\beta < \lambda$ gilt, erhalten wir, dass $\lambda\chi_{\max} = \beta$. Unter Verwendung von (13.1.29) und (13.1.25) folgt nun, dass $v^* = w^*$ bewiesen ist.

– Wenn $k = j + 1$ ist:

Wegen (13.1.19) gibt es ein $\phi \in [0, 1]$, so dass

$$v_k = (1 - \phi)v_{j-1} + \phi v_{j+2}. \quad (13.1.32)$$

Da aus (13.1.18) folgt, dass $v_k \neq v_{k+1} = v_{j+2}$, ergibt sich, dass $\phi \in [0, 1[$.

Für $\chi \in [0, 1[$ und $\gamma_\chi := \phi + (1 - \phi)\chi \in [0, 1[$ verwenden wir nun (13.1.32) um

$$\begin{aligned} (1 - \gamma_\chi)v_{j-1} + \gamma_\chi v_{j+2} &= (1 - \chi)(1 - \phi)v_{j-1} + (\phi + \chi - \phi\chi)v_{j+2} \\ &= (1 - \chi)((1 - \phi)v_{j-1} + \phi v_{j+2}) + \chi v_{j+2} = (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1} \end{aligned} \quad (13.1.33)$$

zu erhalten.

Benutzt man die Definition von χ_{\max} in (13.1.1) und (13.1.15), so ergibt sich, dass

$$(1 - \gamma_{\chi_{\max}})v_{j-1} + \gamma_{\chi_{\max}}v_{j+2} = (1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1} = v^* \notin \Omega, \quad (13.1.34)$$

$$(1 - \gamma_\chi)v_{j-1} + \gamma_\chi v_{j+2} = (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1} \in \Omega, \quad \forall \chi \in]\chi_{\max}, 1[. \quad (13.1.35)$$

Da $\{\gamma_\chi \mid \chi \in]\chi_{\max}, 1[\} =]\gamma_{\chi_{\max}}, 1[$, erhalten wir aus (13.1.24) dass $\beta = \gamma_{\chi_{\max}}$. Benutzt man nun (13.1.25) und (13.1.34), so folgt dass $v^* = w^*$.

d) Dank der Aussage a) kann man das Lemma 12.3.8 verwenden, um zu zeigen, dass die in (13.1.4) definierte Funktion die Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen,pw.mo.af}}$ ist.

e) Die Aussage folgt aus den Aussagen a)-d) unter Verwendung der vektoriellen Version der Anfangzustandsversion des Lemmas 4.2.2 sowie der Lemmata 12.5.3 und 12.3.5. \square

Aus dem Lemma 13.1.1 erhält man für den wichtigen Spezialfall, dass Ω konvex ist:

13.1.2 Korollar. Es seien ζ , Ω , und Λ wie in Lemma 13.1.1 gegeben. Wenn Ω konvex ist, dann gilt für den verallgemeinerten RELAY-Operator aus Def. 6.1.17 und seine Einschränkung $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen,pw.mo.af.}}$ auf $\Lambda \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$:

a) Für $\lambda_0 \in \Lambda$ und $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(X)$ ist

$$\begin{aligned} \text{Gen}_{S_F(X)} \left\langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen,pw.mo.af.}} \right\rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) &= \text{Gen}_{S_F(X)} \left\langle \mathcal{R}_\zeta^{\text{gen}} \right\rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} \zeta(v_n), & \text{wenn } v_n \notin \Omega, \\ \lambda_0, & \text{wenn } v_i \in \Omega, \quad \forall i = 0, \dots, n, \\ \zeta((1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1}) & \text{mit} \\ \quad k := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid v_k \notin \Omega\}, \\ \quad \chi_{\max} := \max\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1} \notin \Omega\}, \\ \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.36)$$

b) Es ist $h_{\mathcal{R}, \zeta}^{\text{gen}} : X \times X \rightarrow Y$ mit

$$h_{\mathcal{R}, \zeta}^{\text{gen}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \zeta(x_2) - \zeta(x_1), & \text{wenn } x_1 \notin \Omega, x_2 \notin \Omega, \\ 0, & \text{wenn } x_1 \in \Omega, x_2 \in \Omega, \\ \zeta((1 - \chi_{\max})x_1 + \chi_{\max}x_2) - \zeta((1 - \chi_{\min})x_1 + \chi_{\min}x_2) & \text{mit} \\ \quad \chi_{\max} := \max\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)x_1 + \chi x_2 \notin \Omega\}, \\ \quad \chi_{\min} := \min\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)x_1 + \chi x_2 \notin \Omega\}, \\ \text{sonst,} \end{cases} \quad (13.1.37)$$

die additive Umkehrbereichs-Aktualisierungsfunktionen von $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen,pw.mo.af.}}$.

c) Es ist $U_{\mathcal{R}, \zeta}^{\text{gen}} : S_{F, \text{perio}}(X_1) \times]0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$\begin{aligned} U_{\mathcal{R}, \zeta}^{\text{gen}}((v_0, v_1, \dots, v_n), \lambda) &= \begin{cases} \zeta((1 - \lambda)v_n + \lambda v_0) - \zeta(v_n), & \text{wenn } v_n \notin \Omega, (1 - \lambda)v_n + \lambda v_0 \notin \Omega, \\ 0, & \text{wenn } v_n \in \Omega, (1 - \lambda)v_n + \lambda v_0 \in \Omega, \\ \zeta((1 - \gamma_{\max})v_n + \gamma_{\max}v_0) - \zeta((1 - \chi_{\max})v_k + \chi_{\max}v_{k+1}) & \text{mit} \\ \quad \gamma_{\max} := \max\{\chi \in [0, \lambda] \mid (1 - \chi)v_n + \chi v_0 \notin \Omega\}, \\ \quad k := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid v_i \notin \Omega\}, \\ \quad \chi_{\max} := \max\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1} \notin \Omega\}, \\ \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.38)$$

die Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{R}_\zeta^{\text{gen,pw.mo.af.}}$.

Für die außerschaltenden, verallgemeinerten RELAY-Operator kann man analog zu Lemma 13.1.1 zeigen:

13. Bsp. für von Hyst.-Operat. mit vektorwertigen Input-Fkt. generierten Fkt. auf Strings

13.1.3 Lemma. *Es sei ein topologischer Raum X gegeben. Es sei eine Funktion $\beta : X \setminus K_0 \rightarrow \Lambda$ gegeben, wobei K_0 das Innere einer abgeschlossenen, nichtleeren Teilmenge K von X ist und Λ eine nichtleere Teilmenge von X ist.*

Für den außerschaltenden verallgemeinerten RELAY-Operator

$$\mathcal{R}_\beta^{out,gen} : \Lambda \times C([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], \Lambda)$$

aus Def. 6.1.18 und seine Einschränkung $\mathcal{R}_\beta^{out,gen,pw.mo.af.}$ auf $\Lambda \times C_{pw.mo.af.}([0, T]; X)$ gilt dann:

a) Für $\lambda_0 \in \Lambda$ und $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(X)$ ist

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{S_F(X)} \left\langle \mathcal{R}_\beta^{out,gen,pw.mo.af.} \right\rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \text{Gen}_{S_F(X)} \left\langle \mathcal{R}_\beta^{out,gen} \right\rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} \beta(v_n), & \text{wenn } v_n \notin K, \\ \lambda_0, & \text{wenn } \text{conv}(v_i, v_{i+1}) \subseteq K, \quad \forall i = 0, \dots, n-1, \\ \beta((1 - \chi_{\text{sup}})v_k + \chi_{\text{sup}}v_{k+1}) & \text{mit} \\ \quad k := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \text{conv}(v_i, v_{i+1}) \not\subseteq K\}, \\ \quad \chi_{\text{sup}} := \sup\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)v_k + \chi v_{k+1} \notin \Omega\}, \\ \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.39)$$

b) Es ist

$$h_{\mathcal{R},\beta}^{out,gen,pw.mo.af.} : X \times X \rightarrow Y \text{ mit}$$

$$h_{\mathcal{R},\beta}^{out,gen,pw.mo.af.}(x_1, x_2) = \begin{cases} \beta(x_2) - \beta(x_1), & \text{wenn } \text{conv}(x_1, x_2) \cap K = \emptyset, \\ 0, & \text{wenn } \text{conv}(x_1, x_2) \subseteq K, \\ \beta((1 - \chi_{\text{sup}})x_1 + \chi_{\text{sup}}x_2) - \beta((1 - \chi_{\text{inf}})x_1 + \chi_{\text{inf}}x_2) & \text{mit} \\ \quad \chi_{\text{sup}} := \sup\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)v_1 + \chi v_2 \notin K\}, \\ \quad \chi_{\text{inf}} := \inf\{\chi \in [0, 1[\mid (1 - \chi)v_1 + \chi v_2 \notin K\}, \\ \text{sonst,} \end{cases} \quad (13.1.40)$$

die additive Umkehrbereichs-Aktualisierungsfunktionen von $\mathcal{R}_\beta^{out,gen,pw.mo.af.}$

c) $\mathcal{R}_\beta^{out,gen,pw.mo.af.}$ vergisst das Entfernen von Madelung-Zyklen.

d) Es ist $h U_{\mathcal{R},\beta}^{out,gen,pw.mo.af.} : S_{F,perio}(X_1) \times]0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$U_{\mathcal{R},\beta}^{out,gen,pw.mo.af.}((v_0, v_1, \dots, v_n), \lambda) = \begin{cases} \beta((1-\lambda)v_n + \lambda v_0) - \beta(v_0), & \text{wenn } v_n \notin K, (1-\lambda)v_n + \lambda v_0 \notin K, \\ 0, & \text{wenn } (1-\gamma)v_n + \gamma v_0 \in K, \quad \forall \gamma \in [0, \lambda], \\ \beta((1-\gamma_{\sup})v_n + \gamma_{\sup}v_0) - \beta((1-\chi_{\sup})v_k + \chi_{\sup}v_{k+1}) & \text{mit} \\ \gamma_{\sup} := \sup\{\chi \in [0, \lambda] \mid (1-\gamma)v_n + \gamma v_0 \notin \Omega\}, \\ k := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \text{conv}(v_i, v_{i+1}) \not\subseteq \Omega\}, \\ \chi_{\sup} := \sup\{\chi \in [0, 1[\mid (1-\chi)v_k + \chi v_{k+1} \notin \Omega\}, \\ \text{sonst,} \end{cases} \quad (13.1.41)$$

die Periodizitätsbereich-Aktualisierungsfunktion von $\mathcal{R}_{\beta}^{out,gen,pw.mo.af.}$.

e) Für $\mathcal{R}_{\beta}^{out,gen,pw.mo.af.}$ gelten die drei Madelungschen Regeln im Sinne der Definitionen 4.1.4 und 4.1.13, und $\mathcal{R}_{\beta}^{gen,pw.mo.af.}$ hat die Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion im Sinne der Def. 12.2.1

Beweis. Der Beweis des Lemmas 13.1.1 überträgt sich. \square

Analog wie das Korollar 13.1.2 zum Lemma 13.1.1 kann man zu dem obigen Lemma ein Korollar für den Spezialfall formulieren, dass K konvex ist.

13.1.2. Weitere vektorielle RELAY-Operatoren

13.1.4 Bemerkung. Dank der Darstellung der RELAY-Operatoren wie in Bemerkung 6.1.20 kann man das Korollar 13.1.2 und das Korollar für den entsprechenden außenschaltenden RELAY-Operator für die in den Abschnitten 6.1.1–6.1.10 definierten RELAY-Operatoren anwenden. Also gelten für diese Operatoren die drei Madelungschen Regeln im Sinne der Definitionen 4.1.4 und 4.1.13. Weiterhin haben diese die Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion im Sinne der Def. 12.2.1.

Weitere Resultate für diese Operatoren:

a) Es sei $\theta \in [0, 2\pi[$ gegeben, und es sei der Einheitsvektor $e_{\theta} := (\cos(\theta), \sin(\theta))$ definiert wie in 6.1.1. Es sei $\Lambda := \{-e_{\theta}, e_{\theta}\}$. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\lambda_0 \in \Lambda$ und $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(\mathbb{R}^2)$ gegeben.

- Für den vektoriellen außenschaltenden RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{out,2 \dim.}$ aus Def. 6.1.1

13. Bsp. für von Hyst.-Operat. mit vektorwertigen Input-Fkt. generierten Fkt. auf Strings

gilt, dass

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{\Lambda \times S_F(\mathbb{R}^2)} \left\langle \mathcal{R}_{a,b,\theta}^{\text{out},2 \text{ dim.}} \right\rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} e_\theta, & \text{wenn } e_\theta \cdot v_n > b, \\ -e_\theta, & \text{wenn } e_\theta \cdot v_n < a, \\ \lambda_0, & \text{wenn } a \leq e_\theta \cdot v_i \leq b, \quad \forall i = 0, \dots, n, \\ e_\theta, & \text{wenn } \exists k \in \{0, \dots, n\} : e_\theta \cdot v_k > b : \\ & \quad \forall i \in \{k+1, \dots, n\} : e_\theta \cdot v_k \geq a, \\ -e_\theta, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.42)$$

- Für den BIDIMENSIONAL DELAYED RELAY-Operator $\mathcal{R}_{a,b,\theta}^{2 \text{ dim.}}$ aus Def. 6.1.3, gilt, dass

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{\Lambda \times S_F(\mathbb{R}^2)} \left\langle \mathcal{R}_{a,b,\theta}^{2 \text{ dim.}} \right\rangle (\lambda_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} e_\theta, & \text{wenn } e_\theta \cdot v_n \geq b, \\ -e_\theta, & \text{wenn } e_\theta \cdot v_n \leq a, \\ \lambda_0, & \text{wenn } a < e_\theta \cdot v_i < b, \quad \forall i = 0, \dots, n, \\ e_\theta, & \text{wenn } \exists k \in \{0, \dots, n\} : e_\theta \cdot v_k \geq b : \\ & \quad \forall i \in \{k+1, \dots, n\} : e_\theta \cdot v_k > a, \\ -e_\theta, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.43)$$

b) Sei K eine kompakte, konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^2 . Für den RELAY-Operator im Umfeld des ROTATING MODEL wie in Def. 6.1.5 gilt dann:

- Für alle $\eta_0 \in \mathbb{R}^2$ und $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{\mathbb{R}^2 \times S_F(\mathbb{R}^2)} \left\langle \mathcal{R}_K^{\text{rot},2 \text{ dim.}} \right\rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} \text{Proj}_K(v_n), & \text{wenn } v_n \notin \text{int}(K), \\ \text{Proj}_K(\eta_0), & \text{wenn } v_i \in \text{int}(K), \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \\ \chi_{\partial K, \text{Strecke}}(v_{i_{\max}}, v_{i_{\max}+1}) \text{ (siehe Def. 13.1.5 unten) mit} \\ \quad i_{\max} := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid v_i \notin \text{int}(K)\}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.44)$$

- Es ist $h_{\mathcal{R},K}^{\text{rot},2 \text{ dim.}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} & h_{\mathcal{R},K}^{\text{rot},2 \text{ dim.}}(x_1, x_2) \\ &:= \begin{cases} \text{Proj}_K(x_2) - \text{Proj}_K(x_1), & \text{wenn } x_1 \notin \text{int}(K) \text{ und } x_2 \notin \text{int}(K), \\ 0, & \text{wenn } x_1, x_2 \in \text{int}(K) \\ \chi_{\partial K, \text{Strecke}}(x_1, x_2) - \text{Proj}_K(x_1), & \text{wenn } x_1 \notin \text{int}(K) \text{ und } x_2 \in \text{int}(K), \\ \text{Proj}_K(x_2) - \chi_{\partial K, \text{Strecke}}(x_2, x_1), & \text{wenn } x_1 \in \text{int}(K) \text{ und } x_2 \notin \text{int}(K), \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.45)$$

die additive Umkehrbereichs-Aktualisierungsfunktionen der Einschränkung von $\mathcal{R}_K^{\text{rot},2 \text{ dim}}$ auf $\mathbb{R}^2 \times C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; \mathbb{R}^2)$.

c) Für den in Def. 6.1.7 definierten RVM-BALL-RELAY-Operator gilt für $\xi \in \mathbb{R}^N$ und $r > 0$:

- Für $\eta_0 \in \partial B_1(0_X)$ und $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(\mathbb{R}^N)$ gilt

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{\partial B_1(0_X) \times S_F(\mathbb{R}^N)} \langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball}} \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} \zeta_\xi(v_n), & \text{wenn } \|v_n - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r, \\ \eta_0, & \text{wenn } \|v_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r \quad \forall i = 0, 1, \dots, n, \\ \zeta_\xi(\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(v_k, v_{k+1})) & \text{mit} \\ \quad k := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \|v_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r\}, \\ \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.46)$$

mit $\zeta_\xi(v) = \frac{v-\xi}{\|v-\xi\|_{\mathbb{R}^N}}$ wie in (6.1.8).

- Es ist $h_{\mathcal{R},\xi,r}^{\text{RVM-ball}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} & h_{\mathcal{R},\xi,r}^{\text{RVM-ball}}(x_1, x_2) \\ &= \begin{cases} \zeta_\xi(x_2) - \zeta_\xi(x_1), & \text{wenn } \|x_1 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r \text{ und } \|x_2 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r, \\ 0, & \text{wenn } \|x_1 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r \text{ und } \|x_2 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r, \\ \zeta_\xi(\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(x_1, x_2)) - \zeta_\xi(x_1), & \text{wenn} \\ \quad \|x_1 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r \text{ und } \|x_2 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r, \\ \zeta_\xi(x_2) - \zeta_\xi(\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(x_1, x_2)), & \text{wenn} \\ \quad \|x_1 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r \text{ und } \|x_2 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r, \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.47)$$

die additive Umkehrbereichs-Aktualisierungsfunktionen der Einschränkung von $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball}}$ auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; \mathbb{R}^N)$.

d) Für den in Def. 6.1.9 definierten außerschaltenden RVM-BALL-RELAY-Operator gilt für $\xi \in \mathbb{R}^N$ und $r > 0$:

- Für $\eta_0 \in \partial B_1(0_X)$ und $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(\mathbb{R}^N)$ gilt

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{\partial B_1(0_X) \times S_F(\mathbb{R}^N)} \langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}} \rangle (\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} \zeta_\xi(v_n), & \text{wenn } \|v_n - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r, \\ \eta_0, & \text{wenn } \|v_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r \quad \forall i = 0, 1, \dots, n, \\ \zeta_\xi(\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(v_k, v_{k+1})) & \text{mit} \\ \quad k := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \|v_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\}, \\ \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (13.1.48)$$

mit $\zeta_\xi(v) = \frac{v-\xi}{\|v-\xi\|_{\mathbb{R}^N}}$ wie in (6.1.8).

13. Bsp. für von Hyst.-Operat. mit vektorwertigen Input-Fkt. generierten Fkt. auf Strings

- Es ist $h_{\mathcal{R},\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$h_{\mathcal{R},\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \zeta_\xi(x_2) - \zeta_\xi(x_1), & \text{wenn } \|x_1 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r \text{ und } \|x_2 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r, \\ 0, & \text{wenn } \|x_1 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r \text{ und } \|x_2 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r, \\ \zeta_\xi(\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(x_1, x_2)) - \zeta_\xi(x_1), & \text{wenn } \|x_1 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r \text{ und } \|x_2 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r, \\ \zeta_\xi(x_2) - \zeta_\xi(\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(x_1, x_2)), & \text{wenn } \|x_1 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r \text{ und } \|x_2 - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r, \end{cases} \quad (13.1.49)$$

die additive Umkehrbereichs-Aktualisierungsfunktionen der Einschränkung von $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}}$ auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; \mathbb{R}^N)$.

13.1.5 Definition. Für $v, w \in \mathbb{R}^N$ und eine abgeschlossene, nichtleere Teilmenge K des \mathbb{R}^N , so dass ein $\chi \in [0, 1]$ mit $(1 - \chi)v + \chi w \in K$ gibt, sei

$$\chi_{K, \text{Strecke}, 0}(v, w) := \max\{\chi \in [0, 1] \mid (1 - \chi)v + \chi w \in K\}, \quad (13.1.50)$$

$$\chi_{K, \text{Strecke}}(v, w) := (1 - \chi_{K, \text{Strecke}, 0}(v, w))v + \chi_{K, \text{Strecke}, 0}(v, w)w \in K. \quad (13.1.51)$$

13.2. Vektorielle STOP- und PLAY-Operatoren und Variationen wie im Abschnitt 6.2

13.2.1. STOP- und PLAY-Operatoren mit konvexen charakteristischen Mengen auf Hilbert-Räumen

Wie im Abschnitt 6.2.1 sei H ein reeller, separabler Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ und der Norm $\|\cdot\|_H$. Es sei $Z \subseteq H$ eine konvexe, abgeschlossene Menge mit $0_H \in Z$. Da der STOP-Operator und der PLAY-Operator mit der charakteristischen Menge Z beide die Halbgruppeneigenschaft haben, folgt aus dem Korollar 9.2.4

13.2.1 Korollar. Es gilt für alle $\phi_0, \xi_0 \in H$ und alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(H)$ mit $n \geq 2$

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{Z \times S_F(H)} \langle \mathcal{S}_Z \rangle (\phi_0, (v_0, \dots, v_n)) \\ &= \text{Gen}_{Z \times S_F(H)} \langle \mathcal{S}_Z \rangle \left(\text{Gen}_{Z \times S_F(H)} \langle \mathcal{S}_Z \rangle (\phi_0, (v_0, \dots, v_{n-1})), (v_{n-1}, v_n) \right), \end{aligned} \quad (13.2.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{Z \times S_F(H)} \langle \mathcal{P}_Z \rangle (\phi_0, (v_0, \dots, v_n)) \\ &= \text{Gen}_{Z \times S_F(H)} \langle \mathcal{P}_Z \rangle \left(\text{Gen}_{Z \times S_F(H)} \langle \mathcal{P}_Z \rangle (\phi_0, (v_0, \dots, v_{n-1})), (v_{n-1}, v_n) \right). \end{aligned} \quad (13.2.2)$$

Aus Theorem 6.2.7 folgt dass,

13.2.2 Lemma. Es seien $v_0, v_1 \in H$ beliebig.

a) Es sei $\psi_0 \in H$ gegeben. Für $\psi := \mathcal{S}_Z[\psi_0, \pi_{\text{pw.af.}}[(v_0, v_1)]]$ gilt $\psi \in W^{1,1}(0, T; H)$,

$$\psi(0) = P_Z(\psi_0), \quad (13.2.3)$$

$$\psi(t) \in Z, \quad \forall t \in [0, T], \quad (13.2.4)$$

$$\left\langle v_1 - v_0 - T\dot{\psi}(t), \psi(t) - x \right\rangle_H \geq 0 \quad f.\ddot{u.} \quad \forall x \in Z, \quad (13.2.5)$$

$$\left\langle v_1 - v_0 - T\dot{\psi}(t), \dot{\psi}(t) \right\rangle_H = 0 \quad f.\ddot{u.}, \quad (13.2.6)$$

$$\text{Gen}_{Z \times S_F(H)} \langle \mathcal{S}_Z \rangle (\psi_0, (v_0, v_1)) = \psi(T). \quad (13.2.7)$$

b) Es sei $\xi_0 \in H$ gegeben. Für $\xi := \mathcal{P}_Z[\chi_0, \pi_{\text{pw.af.}}[(v_0, v_1)]]$ gilt $\xi \in W^{1,1}(0, T; H)$,

$$\xi(0) = P_Z(u(0) - \xi_0), \quad (13.2.8)$$

$$u(t) - \xi(t) \in Z, \quad \forall t \in [0, T], \quad (13.2.9)$$

$$\left\langle \dot{\xi}, (T-t)v_0 + tv_1 - T(\xi(t) - x) \right\rangle_H \geq 0 \quad f.\ddot{u.} \quad \forall x \in Z, \quad (13.2.10)$$

$$\left\langle \dot{\xi}(t), v_1 - v_0 - T\dot{\xi}(t) \right\rangle_H = 0 \quad f.\ddot{u.}, \quad (13.2.11)$$

$$\text{Gen}_{Z \times S_F(H)} \langle \mathcal{P}_Z \rangle (\xi_0, (v_0, v_1)) = \xi(T). \quad (13.2.12)$$

13.2.3 *Bemerkung.* a) Für PLAY- und STOP-Operatoren mit charakteristischen Mengen die Polyeder sind, kann man eine direkte Rechenvorschrift angeben, um die Operatoren auszuwerten. Aus dieser ergibt sich, dass diese Operatoren nur stückweise monotaffine Level-Funktionen haben.

b) Die Einschränkungen von PLAY- und STOP-Operatoren auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; H)$ sind nur für ganz bestimmte charakteristischen Mengen Z bezüglich der Entfernung von einfachen Madelungzyklen invariant.

c) Nur für ganz bestimmte charakteristische Mengen Z gibt es für den PLAY- und den STOP-Operator additive Formfunktionen, d.h. nur für diese charakteristischen Mengen haben diese Operatoren die Kongruenz-Eigenschaft im Umkehrbereich der Input-Funktion.

13.2.2. Verallgemeinerter vektorieller PLAY-Operator mit zustandsabhängigem Fließgrenzenabstand, wie im Abschnitt 6.2.2

Wie im Abschnitt 6.2.2 sei eine Funktion $\gamma : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben, die differenzierbar ist, so dass $|\gamma'(s)| < 1$ für alle $s \in [0, \infty[$ gilt.

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum.

13.2.4 *Bemerkung.* Um $\mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}$ wie in Def. 6.2.8 von der Menge $M_{\text{pw.af.}}$ aller stückweise affinen Funktionen auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ oder sogar auf $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X)$ zu erweitern, bestimmt man $G := \text{Gen}_{X \times S_F(X)} \langle \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \rangle$ und nimmt dann $\mathcal{H}_G^{\text{gen.}}$ bzw. $\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}$ als Erweiterung.

13. Bsp. für von Hyst.-Operat. mit vektorwertigen Input-Fkt. generierten Fkt. auf Strings

Bei der Auswertung von $\text{Gen}_{X \times S_F(X)} \langle \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \rangle$ hilft das folgende Lemma:

13.2.5 Lemma. Für $f_\gamma^{\text{SAVD}} : X \times X \rightarrow X$ definiert durch

$$\begin{aligned} f_\gamma^{\text{SAVD}}(s, v) &:= \begin{cases} s, & \text{wenn } \|v - s\|_X \leq \gamma(v), \\ v - e_X(v - s) \gamma(v), & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \text{Proj}_{\overline{B_{\gamma(v)}}}(s), \end{aligned} \quad (13.2.13)$$

und den verallgemeinerte PLAY-Operator mit zustandsabhängigen Fließgrenzenabstand aus Def. 6.2.8, gilt für alle $\xi_0 \in X$ und alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(X)$, dass

$$\text{Gen}_{X \times S_F(X)} \langle \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \rangle (\xi_0, (v_0, v_0)) = f_\gamma^{\text{SAVD}}(\xi_0, v_0), \quad (13.2.14)$$

$$\text{Gen}_{X \times S_F(X)} \langle \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \rangle (\xi_0, (v_0, v_1)) = f_\gamma^{\text{SAVD}}(f_\gamma^{\text{SAVD}}(\xi_0, v_0), v_1), \quad (13.2.15)$$

$$\begin{aligned} &\text{Gen}_{X \times S_F(X)} \langle \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \rangle (\xi_0, (v_0, \dots, v_n)) \\ &= f_\gamma^{\text{SAVD}}(\text{Gen}_{X \times S_F(X)} \langle \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \rangle (\xi_0, (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})), v_n). \end{aligned} \quad (13.2.16)$$

Beweis. Setzt man $u := \pi_{\text{pw.af.}}[(v_0, v_1, \dots, v_n)]$, dann gilt für $i = 1, \dots, n$, dass $\frac{i}{n}T$ das maximale Element $t \in]\frac{i-1}{n}, T]$ ist, so dass die Geschwindigkeit von u in $]\frac{i-1}{n}, t]$ keine Richtungsänderung erfährt. Betrachtet man jetzt (6.2.12) und (6.2.14), so folgt, dass

$$p_0 := \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[\xi_0, u] \left(\frac{0}{n}T \right) = f_\gamma(\xi_0, v_0), \quad (13.2.17)$$

$$p_i := \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[\xi_0, u] \left(\frac{i}{n}T \right) = f_\gamma(p_{i-1}, v_i), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (13.2.18)$$

Andererseits gilt, da $\mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}$ ein Hysteres-Operator auf einer Menge ist, die für grundlegende Transformationen invariant ist, dass

$$\begin{aligned} p_i &= \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[\xi_0, u] \left(\frac{i}{n}T \right) = \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[\xi_0, \pi_{\text{pw.af.}}[(v_0, \dots, v_i)]](T) \\ &= \text{Gen}_{X \times S_F(X)} \langle \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \rangle (\xi_0, (v_0, \dots, v_i)), \quad \forall i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (13.2.19)$$

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[\xi_0, u] \left(\frac{0}{n}T \right) = \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}}[\xi_0, \pi_{\text{pw.af.}}[(v_0, v_0)]](T) \\ &= \text{Gen}_{X \times S_F(X)} \langle \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \rangle (\xi_0, (v_0, v_0)). \end{aligned} \quad (13.2.20)$$

Kombiniert man dies alles, so erhält man die gewünschten Gleichungen. \square

- Die Funktion $\text{Gen}_{X \times S_F(X)} \langle \mathcal{P}_\gamma^{\text{SAVD}} \rangle$ und der von dieser Funktion auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ definierte Hysteres-Operator vergessen die Entfernung von einfachen Madelungzyklen nicht.

13.3. Vektorielle PREISACH-Operatoren auf der Basis von RVM-BALL-RELAY-Operatoren wie in Abschnitt 6.3.1

Es sei eine Lebesgue-integrierbare Preisach-Dichte $\omega : \mathbb{R}^N \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Es sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$ die euklidische Norm auf dem \mathbb{R}^N .

13.3.1 Korollar. *Es sei eine Lebesgue-integrierbare Preisach-Dichte $\omega : \mathbb{R}^N \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ wie in der Def. 6.3.1 des PREISACH-Operator auf der Basis von RVM-BALL-RELAY-Operatoren gegeben.*

a) *Dann gilt für alle $\eta_0 \in \text{Map}(\mathbb{R}^N \times [0, \infty[, \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$ und alle $V \in S_F(\mathbb{R}^N)$, dass*

$$\begin{aligned} & \text{Gen}_{\partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times S_F(\mathbb{R}^N)} \langle \mathcal{PR}_\omega^{RVM-ball} \rangle (\eta_0, V) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \omega(\xi, r) \text{Gen}_{\partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times S_F(\mathbb{R}^N)} \langle \mathcal{R}_{\xi, r}^{RVM-ball} \rangle (\eta_0(\xi, r), V) d\xi dr. \end{aligned} \quad (13.3.1)$$

mit $\text{Gen}_{\partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times S_F(\mathbb{R}^N)} \langle \mathcal{R}_{\xi, r}^{RVM-ball} \rangle$ wie in (13.1.46).

b) *Die Funktion $h_{\mathcal{PR}}^{RVM-ball} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, die definiert ist durch*

$$h_{\mathcal{PR}}^{RVM-ball}(x_1, x_2) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \omega(\xi, r) h_{\mathcal{R}_{\xi, r}}^{RVM-ball}(x_1, x_2) d\xi dr \quad (13.3.2)$$

mit $h_{\mathcal{R}_{\xi, r}}^{RVM-ball}$ wie in (13.1.47), ist die additive Umkehrbereichs-Aktualisierungsfunktionen der Einschränkung von $\mathcal{PR}_\omega^{RVM-ball}$ auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; \mathbb{R}^N)$.

c) *Für die Einschränkung von $\mathcal{PR}_\omega^{RVM-ball}$ auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; \mathbb{R}^N)$ gelten die drei Madelung'schen Regeln im Sinne der Definitionen 4.1.4 und 4.1.13, und $\mathcal{R}_\beta^{\text{gen.pw.mo.af}}$ hat die die Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion. im Sinne der Def. 12.2.1*

Beweis. Folgt aus Def. 6.3.1, (13.1.46), (13.1.47) und Lem. 13.1.1. □

13.3.2 Bemerkung. In [54] wird für diese Art von PREISACH-Operatoren im Spezialfall von isotropem ω , untersucht, wie der Operator auf Input-Funktionen reagiert, die uniaxial sind, die man also schreiben kann als skalare Funktion der Zeit mit einen festen Vektor. Unter geeigneten Voraussetzungen kann in [54] kann gezeigt werden, dass dann auch die Output-Funktionen des vektoriellen PREISACH-Operators uniaxial bezüglich des gleichen Vektors sind.

Indem man diese skalaren Funktionen der Zeit als Input-Funktionen betrachtet, wird so ein Hysteresee-Operator mit skalaren Input-Funktionen und Output-Funktionen betrachtet, und für diesen die zugehörige skalare String-Darstellung aus [8] betrachtet.

Für diese wird in [54, Lemma 2.4.12] eine sogenannte *Formfunktion* hergeleitet, die, wie in Bemerkung 4.2.6 erläutert, eine additive Umkehrbereich-Aktualisierungsfunktion im Sinne von Def. 4.2.1 ist.

Betrachtet man das im Korollar 13.3.1 vorgestellte Resultat, so ist dieses dank der in dieser Arbeit vorgestellten Erweiterung der String-Darstellung allgemeiner.

13.4. Weitere Operatoren

13.4.1 Bemerkung. a) Zum Abschluss der Betrachtungen der Beispiele sei darauf hingewiesen, dass sich der im letzten Abschnitt verwendete Ansatz auf alle komplizierteren Hysteresee-Operatoren überträgt, die durch gewichtete Integration über einfachere

13. Bsp. für von Hyst.-Operat. mit vektorwertigen Input-Fkt. generierten Fkt. auf Strings

Hysteresis-Operatoren gewonnen werden. Wenn man für die elementarerer Hysteresis-Operatoren die auf $S_F(X)$ generierten Funktionen bestimmen kann, erhält man durch eine gewichtete Integration der Funktionswerte den Wert der Funktion, die der komplizierter Hysteresis-Operator auf $S_F(X)$ generiert.

Dies gilt z.B. für

- Vektorielle PREISACH-Operatoren, die mit Hilfe von gewichteten Integralen über andere RELAY-Operatoren, wie z.B. denen aus Abschnitt 6.1, gewonnen werden,
 - Multi-dimensionale PRANDTL-ISHLINSKII-Operatoren, wie z.B in Abschnitt 6.4.
- b) Dieser Ansatz überträgt sich auf andere kompliziertere Hysteresis-Operatoren, die auf andere Weise aus einfacheren Hysteresis-Operatoren gewonnen werden.

Dies gilt z.B. für

- Vektorielle PREISACH-Operatoren, bei denen von der Formulierung des skalaren PREISACH-Operators mit Hilfe von skalaren PLAY-Operatoren wie in Abschnitt 3.5.2 ausgegangen wird, und dann zu PLAY-Operatoren mit vektorwertigen Input übergegangen wird.
- PREISACH-Operatoren mit verallgemeinerten vektoriellen PLAY-Operatoren mit zustandsabhängiger Fließgrenzenabstand wie im Abschnitt 6.3.2..

14. Fortsetzung von Hysterese-Operatoren für stetige, stückweise monotaffine Funktionen

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest, und es seien normierte Räume $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ gegeben.

14.0.1 Bemerkung. Da $C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ dicht in $C([0, T]; X)$ liegt, aber auch eine Teilmenge von $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ ist, kann man aus Hysterese Operatoren, die auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ definiert werden, und lokal Lipschitz-stetig sind, durch die $C([0, T]; X)$ -folgenstetige Fortsetzung nach Satz 2.3.1 Hysterese Operatoren gewinnen, die auf ganz $C([0, T]; X)$ definiert sind.

14.0.2 Definition. Es sei eine Abbildung $G : S(X) \rightarrow Y$ gegeben.

- a) Es sei eine monoton steigende Funktion $\psi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben. Dann nennt man G *lokal Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten Abschätzung ψ* , wenn für alle Strings $V, W \in S(X)$ deren Länge gleich ist, gilt, dass

$$\|G(V) - G(W)\|_Y \leq \psi(|V|_{S(X)} + |W|_{S(X)}) |V - W|_{S(X)} \quad (14.0.1)$$

mit $|\cdot|_{S(X)}$ wie in Def. 7.1.5.

- b) Man nennt G *lokal Lipschitz-stetig*, wenn es eine monoton steigende Funktion $\psi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gibt, so dass G lokal Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten Abschätzung ψ ist.

14.0.3 Lemma. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $G : S(X) \rightarrow Y$ die Funktion, die von dem Operator auf $S(X)$ generiert wird, d.h. $G = \text{Gen}_{S(X)}\langle \mathcal{H} \rangle = \text{ext}(\text{Gen}_{S_F(X)}\langle \mathcal{H} \rangle)$.

- a) Es sei eine monoton steigende Funktion $\psi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ gegeben. Dann ist \mathcal{H} genau dann lokal Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten Abschätzung ψ , wenn dies für G gilt.
- b) Es ist \mathcal{H} genau dann lokal Lipschitz-stetig, wenn dies für G gilt.

Beweis. a) Es seien $u, v \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Ist $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ die Vereinigung von Monotaffinitätszerlegungen beider Funktionen, dann liefert das Korollar 11.4.2, dass (11.1.7) und (11.1.7b) für u und v gelten, und somit

$$\mathcal{H}[u](T) - \mathcal{H}[v](T) = G(u(t_0), \dots, u(t_n)) - G(v(t_0), \dots, v(t_n)). \quad (14.0.2)$$

14. Fortsetzung von Hysterese-Operatoren für stetige, stückweise monotaffine Funktionen

Somit ist G lokal Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten Abschätzung ψ genau dann, wenn für alle $u, v \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ gilt, dass

$$\|\mathcal{H}[u](T) - \mathcal{H}[v](T)\|_Y \leq \psi \left(\max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_X \right) |u(T) - v(T)|_X. \quad (14.0.3)$$

Nach dem Kor. 1.5.5 ist dies äquivalent dazu, dass \mathcal{H} lokal Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten Abschätzung ψ ist.

b) Aussage folgt unmittelbar aus der Aussage a).

□

Dank des Satzes 2.3.1 liefert das Lemma das folgende Korollar :

14.0.4 Korollar. *Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei $G : S(X) \rightarrow Y$ die Funktion, die von dem Operator generiert wird, d.h. $G = \text{Gen}_{S(X)}\langle \mathcal{H} \rangle$.*

Wenn G eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung ist, dann gilt:

- a) *Es gibt genau eine Fortsetzung $\overline{\mathcal{H}} : C([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ von \mathcal{H} , die $C([0, T]; X)$ -konvergente Folgen auf punktweise konvergierende Folgen abbildet.*
- b) *$\overline{\mathcal{H}}$ ist ein Hysterese-Operator, der lokal Lipschitz-stetig ist.*

Teil V.

Hysteresis-Operatoren mit unstetigen Input-Funktionen und die Bogenlängen-Erweiterung von Hysteresis-Operatoren

15. Unstetige Funktionen und Funktionen von beschränkter Variation und ihre Bogenlängen Parametrisierung

15.1. Grundlegendes zu Funktionen mit Unstetigkeiten

Es seien $T > 0$, ein topologischer Vektorraum X und $t_a, t_b \in \mathbb{R}$ mit $t_a < t_b$ gegeben.

15.1.1 Definition. Es sei eine Abbildung $u : [t_a, t_b] \rightarrow X$ gegeben.

- a) Die Menge $\text{Discont}(u)$ der Unstetigkeitspunkte von u ist die Menge aller Punkte $t \in [t_a, t_b]$ in denen u nicht stetig ist, d.h. entweder existiert $\lim_{[t_a, t_b] \setminus \{t\} \ni s \rightarrow t} u(s)$ nicht, oder der Grenzwert existiert, stimmt aber nicht mit $u(t)$ überein.
- b) Es stehen $u(t+)$ und $u(t-)$ für die einseitigen Grenzwerte, d.h.

$$u(t+) := \lim_{h \searrow 0} u(t+h), \quad \forall t \in [t_a, t_b[, \quad u(t-) := \lim_{h \searrow 0} u(t-h), \quad \forall t \in]t_a, t_b] \quad (15.1.1)$$

und zur Vereinfachung der Notation sei

$$u(t_a-) := u(t_a), \quad u(t_b+) := u(t_b). \quad (15.1.2)$$

- c) Die Menge $\text{Discont}_+(u)$ der rechtsseitigen Unstetigkeitspunkte von u ist die Menge aller Punkte $t \in [t_a, t_b]$ in denen u nicht rechtsseitig stetig ist, d.h. entweder existiert $u(t+)$ nicht, oder es ist $u(t+) \neq u(t)$.
- d) Die Menge $\text{Discont}_-(u)$ der linksseitigen Unstetigkeitspunkte von u ist die Menge aller Punkte $t \in [t_a, t_b]$ in denen u nicht linksseitig stetig ist, d.h. entweder existiert $u(t-)$ nicht, oder es ist $u(t-) \neq u(t)$.

15.1.2 Lemma. Es sei eine Abbildung $u : [t_a, t_b] \rightarrow X$ gegeben. Dann ist

$$\text{Discont}(u) = \text{Discont}_+(u) \cup \text{Discont}_-(u). \quad (15.1.3)$$

15.2. Funktionen von beschränkter Variation

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reflexiver Banachraum.

Die folgenden Definitionen und Betrachtungen folgen [4, 24, 37, 42, 62].

Im Unterschied zu [2, 58, 61, 70] werden hierbei zwei Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, als unterschiedliche Funktionen behandelt, und nicht nur als zwei unterschiedliche Repräsentanten einer Funktion.

15.2.1 Definition. Es seien $t_a \leq t_b < t_c \leq t_d$ und eine Funktion $u : [t_a, t_b] \rightarrow X$ gegeben.

a) Es sei $t_b = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t_c$ eine Zerlegung von $[t_b, t_c]$. Dann ist die *Variation von u bezüglich $d := \{\tau_0, \dots, \tau_n\}$* definiert durch

$$\text{Var}_d(u) := \sum_{i=1}^n \|u(\tau_i) - u(\tau_{i-1})\|_X. \quad (15.2.1)$$

b) Die *totale Variation von u auf $[t_b, t_c]$* ist definiert durch

$$\text{Var}(u, [t_b, t_c]) := \sup \{ \text{Var}_d(u) \mid d = \{\tau_0, \dots, \tau_n\} \text{ und } t_b = \tau_0 < \dots < \tau_n = t_c \text{ ist eine Zerlegung von } [t_b, t_c] \}. \quad (15.2.2)$$

c) Wenn $\text{Var}(u, [t_b, t_c])$ endlich ist, dann sagt man, dass u auf $[t_b, t_c]$ von beschränkter Variation ist.

d) Die *Menge der Funktionen mit beschränkter Variation auf $[t_b, t_c]$* ist definiert durch

$$BV([t_b, t_c], X) := \{v : [t_b, t_c] \rightarrow X \mid v \text{ ist auf } [t_a, t_b] \text{ von beschränkter Variation}\}. \quad (15.2.3)$$

15.2.2 Lemma. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Es seien $t_a, t_b, t_c \in I$ mit $t_a < t_b < t_c$ gegeben. Es sei $f : I \rightarrow X$ gegeben. Dann ist

$$\text{Var}(f, [t_a, t_b]) \leq \text{Var}(f, [t_a, t_b]) + \text{Var}(f, [t_b, t_c]) = \text{Var}(f, [t_a, t_c]). \quad (15.2.4)$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition. \square

15.2.3 Lemma. Es seien $t_a \leq t_b < t_c \leq t_d$ und $u : [t_a, t_d] \rightarrow X$ gegeben, so dass u auf $[t_b, t_c]$ monoton ist. Dann ist u auf $[t_b, t_c]$ von beschränkter Variation und

$$\text{Var}(u, [t_b, t_c]) = \|u(t_c) - u(t_b)\|_X. \quad (15.2.5)$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine monoton steigende Funktion $\beta : [t_b, t_c] \rightarrow [0, 1]$ mit $\beta(0) = 0$, $\beta(1) = 1$ und

$$u(t) = (1 - \beta(t))u(t_{i-1}) + \beta(t)u(t_i), \quad \forall t \in [t_b, t_c]. \quad (15.2.6)$$

Dann gilt für jede Zerlegung $t_b = \tau_0 < \dots < \tau_n = t_c$ von $[t_b, t_c]$ und $d := \{\tau_0, \dots, \tau_n\}$, dass

$$\begin{aligned} \text{Var}_d(u) &= \sum_{i=1}^n \|u(\tau_i) - u(\tau_{i-1})\|_X = \sum_{i=1}^n \|(\beta(\tau_i) - \beta(\tau_{i-1}))(u(t_c) - u(t_b))\|_X \\ &= \sum_{i=1}^n (\beta(\tau_i) - \beta(\tau_{i-1})) \|u(t_c) - u(t_b)\|_X = \|u(t_c) - u(t_b)\|_X. \end{aligned} \quad (15.2.7)$$

Damit folgt, dass u auf $[t_b, t_c]$ von beschränkter Variation ist, und dass $\text{Var}(u, [t_b, t_c]) = \|u(t_c) - u(t_b)\|_X$. \square

Aus dem Lemma erhält man:

15.2.4 Korollar. a) Es ist $\text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X) \subset BV([0, T], X)$.

b) Es seien $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ und eine Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben. Dann ist

$$\text{Var}(u, [0, t]) = \|u(t_0) - u(t)\|_X, \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (15.2.8a)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(u, [0, t]) &= \sum_{i=1}^{k-1} \|u(t_{i-1}) - u(t_i)\|_X + \|u(t_{k-1}) - u(t)\|_X, \\ &\quad \forall t \in]t_{k-1}, t_k], \quad k = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (15.2.8b)$$

$$\text{Var}(u, [0, T]) = \sum_{i=1}^n \|u(t_{i-1}) - u(t_i)\|_X. \quad (15.2.8c)$$

Beweis. a) Folgt aus der Aussage b)

b) Für $i = 1, \dots, n$ und $t \in]t_{i-1}, t_i]$ ist u auf $[t_{i-1}, t]$ monotaffin. Also liefert die Kombination von Lemma 15.2.2 und Lemma 15.2.3, dass $\text{Var}(u, [t_{i-1}, t]) = \|u(t) - u(t_{i-1})\|_X$. Dann folgen die Gleichungen in (15.2.8) durch eine einfache Induktion. \square

15.2.5 Lemma. Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein strikt konvexer Raum. Es seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $t_1 < t_2$ gegeben, und es sei eine Funktion $u : [t_1, t_2] \rightarrow X$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) u ist von beschränkter Variation, und es gilt für alle $s_1, s_2 \in [t_1, t_2]$ mit $s_1 < s_2$, dass

$$\text{Var}(u, [s_1, s_2]) = \|u(s_1) - u(s_2)\|_X. \quad (15.2.9)$$

b) u ist von beschränkter Variation, und es ist

$$\text{Var}(u, [t_1, t_2]) = \|u(t_1) - u(t_2)\|_X. \quad (15.2.10)$$

c) u ist monotaffin.

Beweis. **c) \implies a):** Folgt durch Kombination von Lemma 15.2.3 und Lemma 10.1.8..

a) \Rightarrow b): Klar

b) \Rightarrow c): Es sei b) erfüllt.

- Wenn $u(t_1) = u(t_2)$, dann folgt aus (15.2.10), dass $\text{Var}(u, [t_1, t_2]) = 0$ ist. Also ist $u(t) \equiv u(t_1)$ auf $[t_1, t_2]$, und damit ist u auf $[t_1, t_2]$ monotaffin.
- Wenn $u(t_1) \neq u(t_2)$, dann gilt für alle $t \in [t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - u(t_2)\|_X &\leq \|u(t_1) - u(t)\|_X + \|u(t) - u(t_2)\|_X \\ &\leq \text{Var}(u, [t_1, t_2]) = \|u(t_1) - u(t_2)\|_X. \end{aligned} \quad (15.2.11)$$

Also ist

$$\|u(t_1) - u(t)\|_X + \|u(t) - u(t_2)\|_X = \|u(t_1) - u(t_2)\|_X. \quad (15.2.12)$$

Somit kann man $\beta : [t_1, t_2] \rightarrow [0, 1]$ definieren durch

$$\beta(t) := \frac{1}{\|u(t_2) - u(t_1)\|_X} \|u(t) - u(t_1)\|_X, \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (15.2.13)$$

und es gilt $\beta(t_1) = 0$, $\beta(t_2) = 1$ und

$$1 - \beta(t) = \frac{1}{\|u(t_1) - u(t_2)\|_X} \|u(t) - u(t_2)\|_X, \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (15.2.14)$$

Für $t_1 \leq s_1 < s_2 \leq t_2$ gilt

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - u(t_2)\|_X &\leq \|u(t_1) - u(s_2)\|_X + \|u(s_2) - u(t_2)\|_X \\ &\leq \|u(t_1) - u(s_1)\|_X + \|u(s_1) - u(s_2)\|_X + \|u(s_2) - u(t_2)\|_X \\ &\leq \text{Var}(u, [t_1, t_2]) = \|u(t_1) - u(t_2)\|_X, \end{aligned} \quad (15.2.15)$$

und somit

$$\|u(t_1) - u(s_2)\|_X = \|u(t_1) - u(s_1)\|_X + \|u(s_1) - u(s_2)\|_X. \quad (15.2.16)$$

Daher liefert (15.2.13), dass β monoton steigend ist.

Ang., es gibt ein $t_* \in [t_1, t_2]$ mit

$$u(t_*) \neq (1 - \beta(t_*))u(t_1) + \beta(t_*)u(t_2) =: u_*. \quad (15.2.17)$$

Mit Hilfe von (15.2.13) und (15.2.14), sieht man nun, dass

$$\|u_* - u(t_1)\|_X = \beta(t_*) \|u(t_1) - u(t_2)\|_X = \|u(t_*) - u(t_1)\|_X, \quad (15.2.18)$$

$$\|u_* - u(t_2)\|_X = (1 - \beta(t_*)) \|u(t_1) - u(t_2)\|_X = \|u(t_*) - u(t_2)\|_X. \quad (15.2.19)$$

Da X strikt konvex ist, gilt

$$\left\| \frac{1}{2} (u_* + u(t_*)) - u(t_1) \right\|_X < \|u(t_*) - u(t_1)\|_X, \quad (15.2.20)$$

$$\left\| \frac{1}{2} (u_* + u(t_*)) - u(t_2) \right\|_X < \|u(t_*) - u(t_2)\|_X. \quad (15.2.21)$$

Also ist

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - u(t_2)\|_X &\leq \left\| u(t_1) - \frac{1}{2} (u_* + u(t_*)) \right\|_X + \left\| \frac{1}{2} (u_* + u(t_*)) - u(t_2) \right\|_X \\ &< \|u(t_1) - u(t_*)\|_X + \|u(t_*) - u(t_2)\|_X \leq \text{Var}(u, [t_1, t_2]) = \|u(t_1) - u(t_2)\|_X. \end{aligned} \quad (15.2.22)$$

Dies ist ein Widerspruch. Somit gilt für alle $t \in [t_1, t_2]$, dass

$$u(t) = (1 - \beta(t))u(t_1) + \beta(t)u(t_2). \quad (15.2.23)$$

Insgesamt ist daher gezeigt, dass u auf $[t_1, t_2]$ monotaffin ist. □

15.2.6 Lemma. *Es seien $u : [0, T] \rightarrow X$ und eine zulässige Zeittransformation α von $[0, T]$ gegeben. Dann gilt für alle $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2$, dass*

$$\text{Var}(u \circ \alpha, [t_1, t_2]) = \text{Var}(u, [\alpha(t_1), \alpha(t_2)]). \quad (15.2.24)$$

Beweis. Folgt durch Ausnutzen der Definition der Variation und der Monotonie der Zeittransformation. □

15.2.7 Lemma. *Es seien $u, v : [0, T] \rightarrow X$ gegeben, so dass es $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2$ gibt, so dass $u(t) = v(t)$ für alle $t \in [t_1, t_2]$. Dann gilt für alle $s_1, s_2 \in [t_1, t_2]$ mit $s_1 < s_2$, dass*

$$\text{Var}(u, [s_1, s_2]) = \text{Var}(v, [s_1, s_2]). \quad (15.2.25)$$

Beweis. Folgt durch Ausnutzen der Definition der Variation. □

16. Bogenlängen-Erweiterung von Hysterese-Operatoren

In diesem Abschnitt seien $T > 0$ und ein Hilbert-Raum H mit Norm $\|\cdot\|_H$ gegeben.

16.1. Bogenlängen-Reparametrisierung von Funktionen mit beschränkter Variation

Dieser Abschnitt folgt [62, Sec. 2]; dort sind auch die Beweise zu finden.

16.1.1 Definition. Für $u \in BV([0, T], H)$ ist die *normalisierte Bogenlänge* (NORMALIZED ARC LENGTH) $\text{nal}_u : [0, T] \rightarrow [0, T]$ definiert durch

$$\text{nal}_u(t) := \begin{cases} t, & \text{wenn } \text{Var}(u, [0, T]) = 0, \\ \frac{T}{\text{Var}(u, [0, T])} \text{Var}(u, [0, t]), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (16.1.1)$$

16.1.2 Lemma. Für $u \in BV([0, T], H)$ gilt

- a) Die normalisierte Bogenlänge nal_u ist monoton steigend, es ist $\text{nal}_u(0) = 0$ und $\text{nal}_u(T) = T$.
- b) Es ist $\text{Discont}(\text{nal}_u) = \text{Discont}(u)$.
- c) Es ist

$$[0, T] \setminus \text{nal}_u([0, T]) \subseteq [0, T] \setminus \bigcup_{t \in \text{Discont}(u)} \left(]\text{nal}_u(t-), \text{nal}_u(t+)[\setminus \{\text{nal}_u(t)\} \right). \quad (16.1.2)$$

- d) Wenn u Lipschitz-stetig ist, dann ist nal_u Lipschitz-stetig.

- e) Für $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2$ gilt

$$\|u(t_1) - u(t_2)\|_H \leq \frac{\text{Var}(u, [0, T])}{T} |\text{nal}_u(t_1) - \text{nal}_u(t_2)|. \quad (16.1.3)$$

16.1.3 Lemma. Für $u \in BV([0, T], H)$ und die zugehörige normalisierte Bogenlänge gilt:

16. Bogenlängen-Erweiterung von Hysterese-Operatoren

a) Es gibt genau eine Lipschitz-stetige Funktion $\tilde{u} : [0, T] \rightarrow H$, so dass

$$u = \tilde{u} \circ \text{nal}_u, \quad (16.1.4)$$

$$\tilde{u} \text{ ist affin auf } [\text{nal}_u(t-), \text{nal}_u(t)], \quad \forall t \in \text{Discont}(u) \text{ mit } \text{nal}_u(t-) < \text{nal}_u(t), \quad (16.1.5)$$

$$\tilde{u} \text{ ist affin auf } [\text{nal}_u(t), \text{nal}_u(t+)], \quad \forall t \in \text{Discont}(u) \text{ mit } \text{nal}_u(t) < \text{nal}_u(t+). \quad (16.1.6)$$

b) Die Funktion \tilde{u} ist Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten L so, dass $L \leq \text{Var}(u, [0, T])/T$.

16.1.4 Definition. Es bezeichne $\text{Lip}([0, T], H)$ den Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen von $[0, T]$ nach H .

16.1.5 Definition. Für $u \in BV([0, T], H)$ sei die *Reparametrisierung von u bezüglich der normalisierten Bogenlänge* (REPARAMETRIZATION OF U BY THE NORMALIZED ARC LENGTH) $\text{rpa}_u : [0, T] \rightarrow H$ oder kurz die *Bogenlängen-Reparametrisierung* definiert durch $\text{rpa}_u := \tilde{u}$ mit \tilde{u} wie im Lemma 16.1.3.

Das folgende Korollar folgt aus [62, Cor. 4.1].

16.1.6 Korollar. Für $u \in BV([0, T]; H)$ ist $\text{Var}(u, [0, T]) = \text{Var}(\text{rpa}_u, [0, T])$.

16.2. Erweiterung von Hysterese-Operatoren auf BV-Funktionen auf der Basis der Bogenlängen-Reparametrisierung

16.2.1 Lemma. Für eine nichtleere Menge Y , einen ratenunabhängigen Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H}) (\subseteq \text{Map}([0, T], H)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ und $u \in BV([0, T], H) \cap C([0, T]; H) \cap D(\mathcal{H})$ mit $\text{rpa}_u \in D(\mathcal{H})$ gilt

$$\mathcal{H}[u] = \mathcal{H}[\text{rpa}_u] \circ \text{nal}_u. \quad (16.2.1)$$

Beweis. Da u stetig ist, liefert das Lemma 16.1.2, dass nal_u eine zulässige Zeittransformation ist. Da \mathcal{H} ratenunabhängig ist, folgt dass

$$\mathcal{H}[u] = \mathcal{H}[\text{rpa}_u \circ \text{nal}_u] = \mathcal{H}[\text{rpa}_u] \circ \text{nal}_u. \quad (16.2.2)$$

□

Die beiden folgenden Definitionen folgen [62, The. 4.1], und ähnlichen Definition in [60, 61].

16.2.2 Definition.

Für einen ratenunabhängigen Operator $\mathcal{H} : \text{Lip}([0, T], H) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ ist die *BV-Erweiterung* $\mathcal{BV}\langle \mathcal{H} \rangle : BV([0, T]; H) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ definiert durch

$$\mathcal{BV}\langle \mathcal{H} \rangle[u] := \mathcal{H}[\text{rpa}_u] \circ \text{nal}_u, \quad \forall u \in BV([0, T]; H). \quad (16.2.3)$$

16.2.3 Definition. Für einen Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq BV([0, T], H)) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ gilt:

Man sagt, dass \mathcal{H} *lokal isoton* ist, wenn für alle $u \in D(\mathcal{H}) \cap BV([0, T], H)$ und alle $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2$ gilt:

$$\text{Var}(u, [t_1, t_2]) = \|u(t_2) - u(t_1)\|_H \implies \text{Var}(\mathcal{H}[u], [t_1, t_2]) = \|\mathcal{H}[u](t_1) - \mathcal{H}[u](t_2)\|_H. \quad (16.2.4)$$

16.2.4 Lemma. Für einen ratenunabhängigen Operator $\mathcal{H} : \text{Lip}([0, T], H) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ und $\mathcal{B} := \mathcal{BV}\langle\mathcal{H}\rangle$ gilt:

- a) \mathcal{B} ist ratenunabhängig.
- b) Wenn \mathcal{H} kausal ist, dann ist auch \mathcal{B} kausal.
- c) Wenn \mathcal{H} ein Hysterese-Operator ist, dann ist auch \mathcal{B} ein Hysterese-Operator.
- d) Wenn \mathcal{H} die Einschränkung eines ratenunabhängigen Operators $\mathcal{G} : D(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ mit $D(\mathcal{H}) \subseteq D(\mathcal{G}) \subseteq \text{Map}([0, T], H)$ ist, dann gilt

$$\mathcal{B}[u] = \mathcal{G}[u], \quad \forall u \in C([0, T]; H) \cap BV([0, T]; H) \cap D(\mathcal{G}). \quad (16.2.5)$$

Beweis. Kombiniert man die Definitionen mit Lemma 15.2.6, Lemma 15.2.7. und Lemma 16.2.1, so folgen die Aussagen. \square

16.2.5 Bemerkung. In [60, 61, 62] wird gezeigt, dass es die Isotonie von \mathcal{H} erlaubt, zu zeigen, dass $\mathcal{BV}\langle\mathcal{H}\rangle$ eine bestimmte Stetigkeitseigenschaft hat.

16.3. Zusammenhang zwischen der Bogenlängen-Erweiterung und dem Operator auf unstetigen Funktionen in Def. 11.1.3

Es gilt nun:

16.3.1 Satz. Für einen Operator $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq BV([0, T], H)) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ gilt: Der Operator ist lokal isoton genau dann, wenn für alle $u \in D(\mathcal{H})$ und alle $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2$ gilt:

$$u \text{ ist monotaffin auf } [t_1, t_2] \implies \mathcal{H}[u] \text{ ist monotaffin auf } [t_1, t_2]. \quad (16.3.1)$$

Beweis. Die Aussage folgt sofort mit dem Lemma 15.2.5. \square

Aus dem Satz folgt:

16.3.2 Korollar. Es sei $\mathcal{H} : C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; H) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ gegeben. Dann gilt: Der Operator ist lokal isoton genau dann, wenn er nur monotaffine Level-Funktionen hat.

16. Bogenlängen-Erweiterung von Hysterese-Operatoren

16.3.3 Lemma. *Es gilt für alle $u \in BV([0, T], H)$ und alle $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $t_1 < t_2$ und $s_1 := \text{nal}_u(t_1) < \text{nal}_u(t_2) =: s_2$:*

$$u \text{ ist monotaffin auf } [t_1, t_2] \iff \text{rpa}_u \text{ ist monotaffin auf } [s_1, s_2]. \quad (16.3.2)$$

Beweis. Aus Def. 16.1.5 und (16.1.4) folgt, dass

$$u = \text{rpa}_u \circ \text{nal}_u \text{ auf } [0, T]. \quad (16.3.3)$$

\Leftarrow : Da nal_u monoton steigend ist, liefert das Lemma 10.1.13 diese Folgerung.

\Rightarrow : Nach Voraussetzung gibt es ein monoton steigendes $\beta : [t_1, t_2] \rightarrow [0, 1]$ mit $\beta(t_1) = 0$, $\beta(t_2) = 1$, so dass für alle $t \in [t_1, t_2]$ gilt:

$$u(t) = (1 - \beta(t))u(t_1) + \beta(t)u(t_2), \quad \beta(t) \|u(t_2) - u(t_1)\|_H = \|u(t) - u(t_1)\|_H. \quad (16.3.4)$$

- Wenn $u(t_1) = u(t_2)$ ist, dann folgt dass u auf $[t_1, t_2]$ konstant ist. Also ist $\text{Var}(u, [t_1, t_2]) = 0$ und somit $\text{Var}(u, [0, t_1]) = \text{Var}(u, [0, t_2])$. Da aber

$$\text{nal}_u(t_1) < \text{nal}_u(t_2) \quad (16.3.5)$$

ist, folgt aus Def. 16.1.1, dass $\text{nal}_u(t) = t$ für alle $t \in [0, T]$ gilt. Daher ist $u = \text{rpa}_u$ auf $[t_1, t_2]$, und da u monotaffin auf $[t_1, t_2]$ ist, ergibt sich, dass rpa_u auf $[s_1, s_2] = [t_1, t_2]$ monotaffin ist.

- Wenn $u(t_1) \neq u(t_2)$ ist, dann sei $\alpha : [s_1, s_2] \rightarrow [0, \infty[$ definiert durch

$$\alpha(s) := \frac{\|\text{rpa}_u(s) - u(t_1)\|_H}{\|u(t_2) - u(t_1)\|_H} = \frac{\|\text{rpa}_u(s) - \text{rpa}_u(s_1)\|_H}{\|\text{rpa}_u(s_2) - \text{rpa}_u(s_1)\|_H}. \quad (16.3.6)$$

Mit (16.3.3) und (16.3.4) folgt für alle $t \in [t_1, t_2]$, dass $\alpha(\text{nal}_u(t)) = \beta(t)$ ist und dass

$$\text{rpa}_u(s) = (1 - \alpha(s)) \text{rpa}_u(s_1) + \alpha(s) \text{rpa}_u(s_2) \quad (16.3.7)$$

für alle $s \in \text{nal}_u([t_1, t_2])$ gilt.

Sei $t \in \text{Discont}[u]$ mit $t > t_1$ und $\text{nal}_u(t-) < \text{nal}_u(t)$ beliebig. Dann gelten die beiden folgenden Gleichungen:

$$u(t-) = (1 - \beta(t-))u(t_1) + \beta(t-)u(t_2), \quad (16.3.8)$$

$$u(t-) = \lim_{\tau \nearrow t} \text{rpa}_u \circ \text{nal}_u(\tau) = \text{rpa}_u(\text{nal}_u(t-)). \quad (16.3.9)$$

Also ist $\beta(t-) = \frac{\|u(t-) - u(t_1)\|_H}{\|u(t_2) - u(t_1)\|_H} = \alpha(\text{nal}_u(t-))$, und es folgt, dass (16.3.7) für $s = \text{nal}_u(t-)$ gilt. Da β monoton steigend ist, folgt außerdem, dass $\alpha(\text{nal}_u(t-)) \geq \alpha(s)$ für alle $s \in [0, \text{nal}_u(t-)] \cap \text{nal}_u([0, t])$ gilt.

Da $\text{nal}_u(t-) < \text{nal}_u(t)$ ist, liefert (16.1.5), dass rpa_u auf $[\text{nal}_u(t-), \text{nal}_u(t)]$ affin ist.

Also gilt für alle $\lambda \in [0, 1]$ und $s_\lambda := (1 - \lambda) \text{nal}_u(t-) + \lambda \text{nal}_u(t)$, dass

$$\text{rpa}_u(s_\lambda) = (1 - \lambda) \text{rpa}_u(\text{nal}_u(t-)) + \lambda \text{rpa}_u(\text{nal}_u(t)). \quad (16.3.10)$$

Für $\alpha_\lambda := (1 - \lambda)\alpha(\text{nal}_u(t-)) + \lambda\alpha(\text{nal}_u(t))$ gilt, dank (16.3.7) für $s = \text{nal}_u(t-)$ und $s = \text{nal}_u(t)$, dass

$$\text{rpa}_u(s_\lambda) = (1 - \alpha_\lambda) \text{rpa}_u(s_1) + \alpha_\lambda \text{rpa}_u(s_2). \quad (16.3.11)$$

Dies liefert, dass

$$\alpha(s_\lambda) = \frac{\|\text{rpa}_u(s_\lambda) - \text{rpa}_u(s_1)\|_H}{\|\text{rpa}_u(s_2) - \text{rpa}_u(s_1)\|_H} = \alpha_\lambda \quad (16.3.12)$$

ist und dass (16.3.7) für $s = s_\lambda$ gilt.

Also gilt (16.3.7) für alle $s \in [\text{nal}_u(t-), \text{nal}_u(t)]$ und α ist auf diesem Intervall monoton steigend. Weiterhin ist $\alpha(\text{nal}_u(t-)) \geq \alpha(s)$ für alle $s \in \text{nal}_u([0, t[)$ und $\alpha(\text{nal}_u(t)) = \beta(t) \leq \alpha(s)$ für alle $s \in \text{nal}_u(]t, T])$.

Mit einer analogen Argumentation kann man für alle $t \in \text{Discont}[u]$ mit $t < t_2$ und $\text{nal}_u(t) < \text{nal}_u(t+)$ zeigen, dass (16.3.7) für alle $s \in [\text{nal}_u(t), \text{nal}_u(t+)]$ gilt, dass α auf diesem Intervall monoton steigend ist, und dass $\alpha(\text{nal}_u(t)) \geq \alpha(s)$ für alle $s \in \text{nal}_u([0, t])$ und $\alpha(\text{nal}_u(t)) \leq \alpha(s)$ für alle $s \in \text{nal}_u(]t, T])$.

Mit dem Lemma 16.1.2 folgt jetzt, dass (16.3.7) für alle $s \in [s_1, s_2]$ gilt, und dass α monoton steigend auf diesem Intervall ist. Da $\alpha(s_1) = 0$ und $\alpha(s_2) = 1$ ist, ergibt dies, dass rpa_u auf $[s_1, s_2]$ monotaffin ist.

□

16.3.4 Korollar. *Es seien $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; X_1)$ und die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben. Dann ist $0 = \text{nal}_u(t_0) < \text{nal}_u(t_1) < \dots < \text{nal}_u(t_n) = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von rpa_u .*

Beweis. • Wenn $n = 1$ ist, und $u(0) = u(T)$ ist, dann ist u konstant, und damit $u = \text{rpa}_u$ monotaffin auf $[0, T]$.

- Andernfalls gilt für alle $i = 1, \dots, n$, dass $u(t_{i-1}) \neq u(t_i)$ und somit $\text{Var}(u, [0, t_{i-1}]) < \text{Var}(u, [0, t_i])$. Also ist $\text{nal}_u(t_{i-1}) < \text{nal}_u(t_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$, und mit dem Lemma 16.3.3 folgt somit, dass rpa_u auf $[\text{nal}_u(t_{i-1}), \text{nal}_u(t_i)]$ monotaffin ist für alle $i = 1, \dots, n$, und, dass für alle $j = 1, \dots, n - 1$ und alle $t \in]t_j, T]$ gilt, dass rpa_u auf $[\text{nal}_u(t_j), \text{nal}_u(t)]$ nicht monotaffin ist.

Da $\text{nal}_u(0) = 0$ ist, folgt, dass $0 = \text{nal}_u(t_0) < \text{nal}_u(t_1) < \dots < \text{nal}_u(t_n) = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von rpa_u ist, wenn man zeigen kann, dass für alle $i = 1, \dots, n - 1$ und $s > \text{nal}_u(t_i)$ gilt, dass rpa_u auf $[\text{nal}_u(t_{i-1}), s]$ nicht monotaffin ist.

16. Bogenlängen-Erweiterung von Hysterese-Operatoren

Ang., es gibt ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und ein $s > \text{nal}_u(t_i)$, so dass rpa_u auf $[\text{nal}_u(t_{i-1}), s]$ monotaffin ist.

Da für alle $t \in]t_i, T]$ gilt, dass rpa_u auf $[\text{nal}_u(t_{i-1}), \text{nal}_u(t)]$ nicht monotaffin ist, folgt dass $\text{nal}_u(t) \notin]\text{nal}_u(t_i), s]$. Dann liefert das Lemma 16.1.2, dass $s \in]\text{nal}_u(t_i), \text{nal}_u(t_i+)]$ liegen muss. Dann ist $u(t_i+) \neq u(t_i)$, und da nach (16.1.6) rpa_u auf $[\text{nal}_u(t_i), \text{nal}_u(t_i+)]$ affin ist, folgt dass $\text{rpa}_u(s) \neq \text{rpa}_u(\text{nal}_u(t_i))$ ist. Da rpa_u auf $[\text{nal}_u(t_{i-1}), s]$ und auf $[\text{nal}_u(t_i), \text{nal}_u(t_{i+1})]$ monotaffin ist, liefert das Korollar 10.1.11, dass rpa_u auf $[\text{nal}_u(t_{i-1}), \text{nal}_u(t_{i+1})]$ monotaffin ist. Dies ist ein Widerspruch.

Also gilt für alle $i = 1, \dots, n-1$ und $s > \text{nal}_u(t_i)$, dass rpa_u auf $[\text{nal}_u(t_{i-1}), s]$ nicht monotaffin ist. □

16.3.5 Satz. *Es sei $\mathcal{H} : \text{Lip}([0, T]; H) \rightarrow \text{Map } H$ ein Hysterese-Operator. Es sei $G : S_F(H) \rightarrow H$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert, d.h. $G = \text{Gen}_{S_F(H)} \langle \mathcal{H} \rangle$.*

Dann ist die BV-Erweiterung $\mathcal{BV}\langle \mathcal{H} \rangle : BV([0, T]; H) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ von \mathcal{H} gemäß Def. 16.2.2 eine Erweiterung des von G auf $\text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; H)$ generierte Hysterese-Operators

$$\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}} : \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; H) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$$

gemäß Def. 11.1.3. Es gilt also

$$\mathcal{BV}\langle \mathcal{H} \rangle[u] = \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[u], \quad \forall u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; H). \quad (16.3.13)$$

Beweis. Es seien $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; H)$ und die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben. Nach dem Korollar 16.3.4 ist dann $0 = \text{nal}_u(t_0) < \text{nal}_u(t_1) < \dots < \text{nal}_u(t_n) = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich rpa_u . Also gilt nach (11.1.7) und Def. 16.2.2

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[u](t) &= G(u(t_0), u(t)) = G(\text{rpa}_u(\text{nal}_u(t_0)), \text{rpa}_u(\text{nal}_u(t))) \\ &= \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[\text{rpa}_u](\text{nal}_u(t)) = \mathcal{H}[\text{rpa}_u](\text{nal}_u(t)) = \mathcal{BV}\langle \mathcal{H} \rangle[u](t), \quad \forall t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (16.3.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[u](t) &= G(u(t_0), \dots, u(t_{i-1}), u(t)) \\ &= G(\text{rpa}_u(\text{nal}_u(t_0)), \dots, \text{rpa}_u(\text{nal}_u(t_{i-1})), \text{rpa}_u(\text{nal}_u(t))) = \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.}}[\text{rpa}_u](\text{nal}_u(t)) \\ &= \mathcal{H}[\text{rpa}_u](\text{nal}_u(t)) = \mathcal{BV}\langle \mathcal{H} \rangle[u](t), \quad \forall t \in]t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (16.3.15)$$

□

16.3.6 Bemerkung. Die in [52, 57] beschriebenen Methoden zur Erweiterung von Hysterese-Operatoren mit skalaren Input-Funktionen auf Operatoren mit Input-Funktionen mit unstetigen, stückweise monotonen Input-Funktionen führt zur gleichen Erweiterung wie die in diesem Abschnitt vorgestellte.

16.4. Beispiele für Hysterese-Operatoren mit unstetigen Input-Funktionen, die nicht von Funktionen auf Konvexitätstripel-freien Strings generiert werden

Analog zu dem in (11.2.6) definierten Operator $\mathcal{H}_{\text{cont-test}}$ sollen weitere Beispiele von Operatoren vorgestellt werden, die nicht von Funktionen auf Konvexitätstripel-freien Strings generiert werden, und damit auch nicht als die Bogenlängen-Erweiterung eines Hysterese-Operators auf den Lipschitz-stetigen Funktionen geschrieben werden können. Dies soll die in den nächsten Kapitel folgende Herleitung eines Darstellungsergebnisses für Hysterese-Operatoren mit stückweise stetigen Input weiter motivieren.

16.4.1. Papierschnipsel und ein klebriges punktförmiges Hindernis

Dieses Beispiel überträgt den Operator aus der Bem. 5.2.5 auf den vektoriellen Fall. Betrachtet man einen Papierschnipsel, den man mit dem Finger über die Tischplatte bewegt, bis er an einem klebrigen Hindernis an der Stelle $h \in \mathbb{R}^2$ auf der Tischplatte kleben bleibt, so führt dies zu dem Operator $\mathcal{A}_h : C([0, T]; \mathbb{R}^2) \times H \rightarrow C([0, T]; \mathbb{R}^2)$ definiert durch

$$\mathcal{A}_h[u](t) := \begin{cases} h, & \text{wenn } u(\tau) = h, \quad \exists \tau \in [0, t], \\ u(t), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (16.4.1)$$

Setzt man $A := \text{Gen}_{S_F(\mathbb{R}^2)} \langle \mathcal{A} \rangle$, so gilt für alle $(v_0, \dots, v_n) \in S_F(\mathbb{R}^2)$:

$$A(v_0, \dots, v_n) = \begin{cases} h & \text{wenn } h \in \text{conv}(v_{i-1}v_i), \quad \exists i \in \{1, \dots, n\}, \\ v_n, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (16.4.2)$$

Es seien $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; \mathbb{R}^2)$ und die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben. Dann gilt für $\mathcal{H}_A^{\text{pw.mo.af.}}[u] : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nach (11.1.7), dass

$$\mathcal{H}_A^{\text{pw.mo.af.}}[u](t) = \begin{cases} h, & \text{wenn } h \in \text{conv}(u(t_0), u(t)), \\ u(t), & \text{sonst,} \end{cases} \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad (16.4.3a)$$

$$\mathcal{H}_A^{\text{pw.mo.af.}}[u](t) = \begin{cases} h, & \text{wenn } h \in \text{conv}(u(t_{i-1}), u(t)), \\ h, & \text{wenn } h \in \text{conv}(u(t_{j-1}), u(t_j)), \quad \exists j \in \{1, \dots, i-1\}, \\ u(t), & \text{sonst,} \end{cases} \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \dots, n. \quad (16.4.3b)$$

Dies ist offensichtlich für viele $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; \mathbb{R}^2)$ nicht die Funktion, die man erhält, wenn man u direkt in die rechte Seite von (16.4.1) einsetzen würde.

Also ist der entsprechende Hysterese-Operator nicht von einer Funktion auf $S_F(\mathbb{R}^2)$ generierbar.

16.4.2. Der außerschaltende RVM-BALL-RELAY-Operator aus Abschnitt 6.1.5 erweitert auf unstetige Input-Funktionen

Es seien $\xi \in \mathbb{R}^N$ und $r > 0$ gegeben. Betrachtet man den außerschaltende RVM-BALL-RELAY-Operator aus Def. 6.1.9, und formuliert man ihn, wie in [14, 12, 13, 9, 11] gefordert, beim Einfrieren mit dem linksseitigen Grenzwert, so führt dies zu

$$\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} \zeta_\xi(u(t)), & \text{wenn } \|u(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r, \\ \eta_0, & \text{wenn } \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r, \quad \forall s \in [0, t], \\ \zeta_\xi \circ u \left(\sup\{s \in [0, t] \mid \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\} - \right), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (16.4.4)$$

mit $\zeta_\xi(v) = \frac{v-\xi}{\|v-\xi\|_{\mathbb{R}^N}}$ wie in (6.1.8). Nun kann man den Operator

$$\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten}} : \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$$

betrachten, der $(\eta_0, u) \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; \mathbb{R}^N)$ auf die Funktion abbildet, die durch die rechte Seite von (16.4.4) definiert wird.

Dies ist ein Hysterese-Operator, und die Einschränkung auf $\partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times C([0, T]; \mathbb{R}^N)$, ist gerade $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}}$. Wenn man also $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten}}$ durch eine Funktion von $B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times S_F(\mathbb{R}^N)$ nach \mathbb{R}^N generieren lassen könnte, müsste es

$$G := \text{Gen}_{\partial B_1(0_X) \times S_F(\mathbb{R}^N)} \left\langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}} \right\rangle$$

sein.

Für $\eta_0 \in \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in S_F(\mathbb{R}^N)$ gilt nach (13.1.48)

$$\begin{aligned} & G(\eta_0, (v_0, v_1, \dots, v_n)) \\ &= \begin{cases} \zeta_\xi(v_n), & \text{wenn } \|v_n - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r, \\ \eta^0, & \text{wenn } \|v_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r \quad \forall i = 0, \dots, n, \\ \zeta_\xi(\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(v_k, v_{k+1})) & \text{mit} \\ \quad k := \max\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \|v_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\}, \\ \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (16.4.5)$$

Dabei liefert $\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(x, y)$ aus Def. 13.1.5 für $x, y \in \mathbb{R}^N$ mit $\|x - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r$ und $\|y - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r$ gerade den Schnittpunkt der Strecke von x nach y mit dem Rand der r -Kugel um den Punkt ξ .

Es seien $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; \mathbb{R}^N)$ und die Standard-Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben. Dann gilt für $\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[\eta_0, u]$:

$[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[\eta_0, u](0) = \begin{cases} \zeta_\xi(u(0)), & \text{wenn } \|u(0) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r, \\ \eta^0, & \text{wenn } \|u(0) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r, \end{cases} \quad (16.4.6)$$

$$\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[\eta_0, u](t) = \begin{cases} \zeta_\xi(u(t)), & \text{wenn } \|u(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r, \\ \eta^0, & \text{wenn } \|u(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r, \\ \|u(t_k) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r, & \forall k = 0, 1, \dots, i-1, \\ \zeta_\xi(\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(u(t_{i-1}), u(t))), & \text{wenn} \\ \|u(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r, & \|u(t_{i-1}) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r, \\ \zeta_\xi(\chi_{\partial B_r(\xi), \text{Strecke}}(u(t_k), u(t_{k+1}))), & \text{mit} \\ k := \max\{i \in \{0, \dots, i-2\} \mid \|u(t_i) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r\}, \\ \text{sonst} \end{cases} \quad (16.4.7)$$

$\forall t \in]t_{i-1}, t_i], 1 \leq i \leq n.$

Somit sieht man, dass für viele $u \in \text{Map}_{\exists \text{st.mo.af.de.}}([0, T]; \mathbb{R}^N)$ gilt, dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{init,pw.mo.af.}}[\eta_0, u] \neq \mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{out,RVM-ball,exten}}[\eta_0, u]. \quad (16.4.8)$$

Damit ist bewiesen, dass der RELAY-Operator $\mathcal{R}_{\xi, r}^{\text{out,RVM-ball,exten}}$ nicht mit den bisher vorgestellten Methoden beschrieben werden kann.

Teil VI.

Quintupel-Strings und stückweise in Intervallinneren affine Funktionen

17. Quintupel-Strings mit und ohne CTC-Tripel

Zur Vorbereitung der Untersuchung von Hysterese-Operatoren, die auf Funktionen u definiert sind, die endlich viele Sprungstellen t_i haben, soll ein String definiert werden, bei den in jeden Eintrag $u(t_i-), u(t_i), u(t_i+)$ abgelegt werden können. Darum wird zunächst mit Tripeln gearbeitet, und dafür wird eine generalisierte Form von Konvexitätstripeln definiert.

Bei der Formulierung der Strings zur Beschreibung einer Funktion werden diese Tripel noch mit zwei Wahrheitswerten gekoppelt, die angeben, ob die Funktion direkt vor bzw. direkt nach der Sprungstelle gleich dem angegebenen Grenzwert ist. Die generalisierte Form von Konvexitätstripeln wird dann auch für Tripel der so entstehenden Quintupel formuliert.

17.1. CTC-Tripel

In diesem Abschnitt sei ein topologischer Vektorraum X gegeben.

17.1.1 Definition. Es seien $V_1 = (x_1, y_1, z_1), V_2 = (x_2, y_2, z_2), V_3 = (x_3, y_3, z_3) \in X^3$ gegeben. Dann sagt man, dass das *Tripel* (V_1, V_2, V_3) ein *CTC-Tripel* (d.h. ein CONVEXITY TRIPLE CONTAINING Tripel, also „ein Konvexitätstripel enthaltendes Tripel“) ist, wenn (z_1, y_2, x_3) ein Konvexitätstripel ist, und alle Komponenten in V_2 gleich sind, d.h. genau dann, wenn

$$x_2 = y_2 = z_2 \in \text{conv}(z_1, x_3). \quad (17.1.1)$$

17.1.2 Bemerkung. Es seien $V_1 = (x_1, y_1, z_1), V_2 = (x_2, y_2, z_2), V_3 = (x_3, y_3, z_3) \in X^3$ gegeben.

a) Im Gegensatz zu den Aussagen in Bemerkung 7.2.2 zu Konvexitätstripeln gilt:

- Das Tripel (V_1, V_2, V_3) kann ein CTC-Tripel sein, ohne dass (V_3, V_2, V_1) ein CTC-Tripel ist. Man betrachte z.B. $((10, 2, 3), (4, 4, 4), (5, 0, 10)) \in (\mathbb{R}^3)^3$.
- Das Tripel (V_1, V_2, V_1) kann ein CTC-Tripel sein, ohne dass $V_2 = V_1$ ist. Man betrachte z.B. $((10, 2, 3), (4, 4, 4), (10, 2, 3)) \in (\mathbb{R}^3)^3$.

Im Gegensatz zur Bemerkung 7.2.2 überträgt sich das Lemma 7.2.3 :

17.1.3 Lemma. *Es sei $(V_0, V_1, V_2, V_3) \in (X^3)^4$ gegeben.*

a) *Wenn (V_0, V_1, V_3) und (V_1, V_2, V_3) CTC-Tripel sind, dann sind auch (V_0, V_2, V_3) und (V_0, V_1, V_2) CTC-Konvexitätstripel.*

17. Quintupel-Strings mit und ohne CTC-Tripel

- b) Wenn (V_0, V_1, V_2) und (V_0, V_2, V_3) CTC-Tripel sind, dann sind auch (V_0, V_1, V_3) und (V_1, V_2, V_3) CTC-Tripel.
- c) Wenn (V_0, V_1, V_2) und (V_1, V_2, V_3) CTC-Tripel sind, und $V_1 \neq V_2$ ist, dann sind auch (V_0, V_1, V_3) und (V_0, V_2, V_3) CTC-Tripel.

Beweis. Es sei $(x_i, y_i, z_i) := V_i$ für alle $i = 0, 1, \dots, 3$.

- a) Es seien (V_0, V_1, V_3) und (V_1, V_2, V_3) CTC-Tripel. Dann folgt

$$x_1 = y_1 = z_1 \in \text{conv}(z_0, x_3), \quad x_2 = y_2 = z_2 \in \text{conv}(z_1, x_3), \quad (17.1.2)$$

Dies liefert für $(z_0, y_1, y_2, x_3) \in X^4$, dass (z_0, y_1, x_3) und (y_1, y_2, x_3) Konvexitätstripel sind. Dann erhält man aus Lemma 7.2.3.a), dass (z_0, y_2, x_3) und (z_0, y_1, y_2) Konvexitätstripel ist.

Da aus sich aus (17.1.2) ergibt, dass $V_1 = (y_1, y_1, y_1)$ ist und $V_2 = (y_2, y_2, y_2)$ ist, folgt dass (V_0, V_1, V_2) und (V_0, V_2, V_3) CTC-Tripel sind.

- b) Es seien (V_0, V_1, V_2) und (V_0, V_2, V_3) CTC-Tripel. Daraus erhält man, dass

$$x_1 = y_1 = z_1 \in \text{conv}(z_0, x_2), \quad x_2 = y_2 = z_2 \in \text{conv}(z_0, x_3). \quad (17.1.3)$$

Dies liefert für $(z_0, y_1, y_2, x_3) \in X^4$, dass (z_0, y_1, y_2) und (z_0, y_2, x_3) Konvexitätstripel sind. Dann ergibt sich aus dem Lemma 7.2.3.b), dass (z_0, y_1, x_3) und (y_1, y_2, x_3) Konvexitätstripel sind.

Da nach (17.1.3) gilt, dass $V_1 = (y_1, y_1, y_1)$ ist und $V_2 = (y_2, y_2, y_2)$ ist, folgt dass (V_0, V_1, V_3) und (V_1, V_2, V_3) CTC-Tripel sind.

- c) Es seien (V_0, V_1, V_2) und (V_1, V_2, V_3) CTC-Tripel, so dass $V_1 \neq V_2$ ist. Dann ergibt sich, dass

$$\text{conv}(z_0, x_2) \ni x_1 = y_1 = z_1 \neq x_2 = y_2 = z_2 \in \text{conv}(z_1, x_3). \quad (17.1.4)$$

Dies liefert für $(z_0, y_1, y_2, x_3) \in X^4$, dass (z_0, y_1, y_2) und (y_1, y_2, x_3) Konvexitätstripel sind, und dass $y_1 \neq y_2$ ist. Dann folgt aus Lemma 7.2.3.c), dass (z_0, y_1, y_3) und (z_0, y_2, x_3) Konvexitätstripel sind.

Da $V_1 = (y_1, y_1, y_1)$ ist und $V_2 = (y_2, y_2, y_2)$ ist, erhält man so, dass (V_0, V_1, V_3) und (V_0, V_2, V_3) CTC-Tripel sind.

□

Analog kann man das Lemma 7.2.4 für CTC-Tripel formulieren.

17.1.4 Lemma. *Es seien $V_1, V_2, V_3 \in X^3$ mit $V_2 \neq V_3$ gegeben, so dass (V_1, V_2, V_3) ein CTC-Tripel ist. Dann ist (V_1, V_3, V_2) kein CTC-Tripel.*

Beweis. Es sei $V_i = (x_i, y_i, x_i)$ für $i = 1, \dots, 3$. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass (V_1, V_3, V_2) ein CTC-Tripel ist.

Dann gilt

$$\text{conv}(z_1, x_3) \ni z_2 = y_2 = x_2 \neq x_3 = y_3 = z_3 \in \text{conv}(z_1, x_2). \quad (17.1.5)$$

Also ist $x_3 \neq x_2$ und (z_1, x_2, x_3) und (z_1, x_3, x_2) sind Konvexitätstriple. Die ist ein Widerspruch zum Lemma 7.2.4. \square

17.1.5 Lemma. *Es sei $(V_0, V_1, \dots, V_n) \in (X^3)^{n+1}$ mit $n \geq 2$ gegeben, so dass für alle $i = 1, \dots, n-1$ (V_0, V_i, V_{i+1}) ein CTC-Tripel ist. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n-1$, dass (V_{i-1}, V_i, V_{i+1}) und (V_0, V_i, V_n) CTC-Tripel sind.*

Beweis. Der Beweis des Lemmas 7.2.5 überträgt sich, da man die Verwendung der Aussage b) im Lemma 7.2.3 durch die Verwendung der Aussage b) in Lemma 17.1.3 ersetzen kann. \square

17.1.6 Lemma. *Es sei $(V_0, V_1, \dots, V_n) \in X^{n+1}$ mit $n \geq 3$ gegeben, so dass (V_0, V_1, V_n) ein Konvexitätstriple ist, und für alle $i = 2, \dots, n-1$ (V_1, V_i, V_{i+1}) ein Konvexitätstriple ist. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n-1$, dass (V_{i-1}, V_i, V_{i+1}) ein Konvexitätstriple ist.*

Beweis. Der Beweis des Lemmas 7.2.6 überträgt sich, da man die Verwendung der Aussage a) im Lemma 7.2.3 durch die Verwendung der Aussage a) in Lemma 17.1.3 ersetzen kann. \square

17.2. Quintupel und entsprechende CTC-Tripel

In diesem Abschnitt sei ein topologischer Vektorraum X gegeben. Es sei $B := \{0, 1\}$.

17.2.1 Definition. Es seien $U_1 = (l_1, V_1, r_1), U_2 = (l_2, V_2, r_2), U_3 = (l_3, V_3, r_3) \in B \times X^3 \times B$ gegeben. Dann sagt man, dass das (U_1, U_2, U_3) ein CTC-Tripel ist, wenn (V_1, V_2, V_3) ein CTC-Tripel ist.

17.2.2 Bemerkung. Es seien $U_1, U_2, U_3 \in B \times X^3 \times B$ gegeben und $(l_i, (x_i, y_i, z_i), r_i) := U_i$ für $i = 1, 2, 3$. Dann ist (U_1, U_2, U_3) genau dann ein CTC-Tripel, wenn (17.1.1) gilt, d.h. wenn

$$x_2 = y_2 = z_2 \in \text{conv}(z_1, x_3). \quad (17.2.1)$$

Die Werte von l_i und r_i sind also für die Entscheidung, ob ein CTC-Tripel vorliegt, nicht von Bedeutung.

Die Lemma 17.1.3 – 17.1.6 liefern unmittelbar:

17.2.3 Lemma. *Es sei $(U_0, U_1, U_2, U_3) \in (B \times X^3 \times B)^4$ gegeben.*

- a) *Wenn (U_0, U_1, U_3) und (U_1, U_2, U_3) CTC-Tripel sind, dann sind auch (U_0, U_2, U_3) und (U_0, U_1, U_2) CTC-Konvexitätstriple.*
- b) *Wenn (U_0, U_1, U_2) und (U_0, U_2, U_3) CTC-Tripel sind, dann sind auch (U_0, U_1, U_3) und (U_1, U_2, U_3) CTC-Tripel.*

17. Quintupel-Strings mit und ohne CTC-Tripel

- c) Wenn (U_0, U_1, U_2) und (U_1, U_2, U_3) CTC-Tripel sind, und $U_1 \neq U_2$ ist, dann sind auch (U_0, U_1, U_3) und (U_0, U_2, U_3) CTC-Tripel.

17.2.4 Lemma. Es sei $(U_0, U_1, \dots, U_n) \in (B \times X^3 \times B)^{n+1}$ mit $n \geq 2$ gegeben, so dass für alle $i = 1, \dots, n-1$ (U_0, U_i, U_{i+1}) ein CTC-Tripel ist. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n-1$, dass (U_{i-1}, U_i, U_{i+1}) und (U_0, U_i, U_n) CTC-Tripel sind.

17.2.5 Lemma. Es sei $(U_0, U_1, \dots, U_n) \in X^{n+1}$ mit $n \geq 3$ gegeben, so dass (U_0, U_1, U_n) ein Konverxitätstriple ist, und für alle $i = 2, \dots, n-1$ (U_1, U_i, U_{i+1}) ein Konverxitätstriple ist. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n-1$, dass (U_{i-1}, U_i, U_{i+1}) ein Konverxitätstriple ist.

17.3. Quintupel-Strings und CTC-Tripel-freie Quintupel-Strings

In diesem Abschnitt sei ein topologischer Vektorraum X gegeben. Es sei $B := \{0, 1\}$.

17.3.1 Definition. a) Es ist

$$S^{b,3,b}(X) := \left\{ \left((l_0, (x_0, y_0, z_0), r_0), \dots, (l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n) \right) \in S(B \times X^3 \times B) \mid \begin{array}{l} l_0 = 1, \quad x_0 = y_0, \quad y_n = z_n, \quad r_n = 1, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : (z_{i-1} = x_i \Rightarrow r_{i-1} = 1 = l_i), \\ \forall i \in \{0, \dots, n\} : (x_i = y_i \Rightarrow l_i = 1) \text{ und } (y_i = z_i \Rightarrow r_i = 1) \end{array} \right\}, \quad (17.3.1)$$

und die Elemente von $S^{b,3,b}(X)^1$ sind die *Quintupel-Strings* zum Raum X .

- b) Es sei $(U_0, \dots, U_n) \in S^{b,3,b}(X)$ gegeben. Für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ sagt man, dass *beim Index i in (U_0, \dots, U_n) die Mitte eines CTC-Tripeln liegt*, wenn (U_{i-1}, U_i, U_{i+1}) ein CTC-Tripel ist.
- c) Es sei $(U_0, \dots, U_n) \in S^{b,3,b}(X)$ gegeben. Dann sagt man, dass (U_0, \dots, U_n) *frei von CTC-Tripeln ist*, wenn für alle $1 \leq i < n$ gilt: Das Tripel (U_{i-1}, U_i, U_{i+1}) ist kein CTC-Tripel.
- d) Es ist

$$S_F^{b,3,b}(X) := \{ (U_0, \dots, U_n) \in S^{b,3,b}(X) \mid (U_0, \dots, U_n) \text{ ist frei von CTC-Tripeln} \} \quad (17.3.2)$$

die Menge aller Quintupel-Strings zum Raum X , die frei von CTC-Tripeln sind.

Während sich die erste Aussage im Lemma 7.3.4 nicht überträgt, überträgt sich die zweite:

¹Die Bezeichnung $b, 3, b$ steht als Kürzel für „BOOLEAN, 3-te Potenz des Raums, BOOLEAN“, d.h. für „Wahrheitswert, 3-te Potenz des Raums, Wahrheitswert“.

17.3.2 Lemma. Für alle $\mathbf{U} = (U_0, \dots, U_n)$ in $S_F^{b,3,b}(X)$ und alle $V = (x, y, z) \in X^3$, so dass für $(l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n) := U_n$ gilt, dass $V \neq (x_n, y_n, z_n)$ ist, folgt:

a) Es ist $\text{concat}(\mathbf{U}, (1, V, 1))$ ein Element von $S_F^{b,3,b}(X)$.

b) Wenn $z_n \neq x$ ist, dann gilt

- Wenn $x \neq y$ ist, dann ist $\text{concat}(\mathbf{U}, (0, V, 1))$ ein Element von $S_F^{b,3,b}(X)$.
- Wenn $y_n \neq z_n$ ist, dann gilt

$$(U_0, \dots, U_{n-1}, (l_n, (x_n, y_n, z_n), 0), (1, V, 1)) \in S_F^{b,3,b}(X). \quad (17.3.3)$$

- Wenn $x \neq y$ und $y_n \neq z_n$ ist, dann gilt

$$(U_0, \dots, U_{n-1}, (l_n, (x_n, y_n, z_n), 0), (0, V, 1)) \in S_F^{b,3,b}(X). \quad (17.3.4)$$

Beweis. Es sei $(l_{n-1}, V_{n-1}, r_{n-1}) := U_{n-1}$. Da (U_{n-1}, U, U_n) ein CTC-Tripel ist, folgt, dass $(V_{n-1}, V, (x_n, y_n, z_n))$ ein CTC-Tripel ist. Da $V \neq (x_n, y_n, z_n)$ ist, ergibt sich mit dem Lemma 17.1.4, dass $(V_{n-1}, (x_n, y_n, z_n), V)$ kein CTC-Tripel ist.

Also sind alle oben beschriebenen Strings aus $S(B \times X^3 \times B)$ Elemente von $S_F^{b,3,b}(X)$, wenn sie in $S^{b,3,b}(X)$ liegen.

Die Voraussetzungen sind gerade so gewählt, dass dies gilt. \square

Die Definition 7.3.5 geht über in:

17.3.3 Definition. Es seien \mathbf{U} und \mathbf{W} in $S^{b,3,b}(X)$ gegeben.

Wenn es eine natürliche Zahl $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $i + 1 < \text{length}(\mathbf{W})$ mit $\text{length}(\cdot)$ wie in Def. 7.1.1² gibt, gibt, so dass beim Index i im String \mathbf{W} die Mitte eines CTC-Tripels liegt, und man \mathbf{U} aus \mathbf{W} durch die Entfernung des Eintrages mit dem Index i erhält, dann sagt man, dass \mathbf{U} aus \mathbf{W} durch Entfernung der Mitte eines CTC-Tripels erhält.

Dabei gilt, dass man durch das Entfernen der Mitte eines CTC-Tripels die Menge $S^{b,3,b}(X)$ nicht verlässt:

17.3.4 Lemma. Es seien $\mathbf{W} \in S^{b,3,b}(X)$ und $\mathbf{U} \in S(B \times X^3 \times B)$ gegeben. Wenn es eine natürliche Zahl $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $i + 1 < \text{length}(\mathbf{W})$ mit $\text{length}(\cdot)$ wie in Def. 7.1.1 gibt, so dass beim Index i im String \mathbf{W} die Mitte eines CTC-Tripels liegt, und man \mathbf{U} aus \mathbf{W} durch die Entfernung des Eintrages mit dem Index i erhält, dann gilt $\mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X)$.

Beweis. Es sei $n := \text{length}(\mathbf{W}) - 1$ und

$$((l_k, (x_k, y_k, z_k)), r_k))_{k=0}^n := \mathbf{W}. \quad (17.3.5)$$

Dann ist

$$\mathbf{U} = ((l_0, (x_0, y_0, z_0), r_0), \dots, (l_{i-1}, (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}), r_{i-1}), \quad (17.3.6)$$

$$(l_{i+1}, (x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}), r_{i+1}), \dots, (l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n)). \quad (17.3.7)$$

²Zur Erinnerung: Wenn $\mathbf{W} = (W_0, \dots, W_n) \in (B \times X^3 \times B)^{n+1}$ ist, dann ist $\text{length}(\mathbf{W}) = n + 1$.

17. Quintupel-Strings mit und ohne CTC-Tripel

Da beim Index i die Mitte eines CTC-Tripels liegt, gilt

$$x_i = y_i = z_i = \text{conv}(z_{i-1}, x_{i+1}). \quad (17.3.8)$$

Für alle $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, i+1\}$ gilt, da $\mathbf{W} \in S^{b,3,b}(X)$, dass aus $z_{k-1} = x_k$ folgt, dass $r_{k-1} = l_k = 1$.

Für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt, da $\mathbf{W} \in S^{b,3,b}(X)$ ist, dass $x_k = y_k$ impliziert, dass $l_k = 1$ ist, und weiterhin, dass $y_k = z_k$ impliziert, dass $r_k = 1$ ist,

Wenn $z_{i-1} = x_{i+1}$ ist, dann folgt aus (17.3.8), dass $z_{i-1} = x_i = z_i = x_{i+1}$ ist. Nutzt man jetzt, dass $\mathbf{W} \in S^{b,3,b}(X)$, so erhält man, dass $r_{i-1} = l_{i+1} = 1$.

Dies zeigt, dass $\mathbf{U} \in S_F^{b,3,b}(X)$ liegt. □

Die Def. 7.3.7 geht über in

17.3.5 Definition. Es seien $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_{n-m} \in S^{b,3,b}(X)$ mit $\text{length}(\mathbf{U}_0) = n+1$ und $\text{length}(\mathbf{U}_{n-m}) = m+1$ mit $n > m$ gegeben. Wenn es für $1 \leq k < m-n$ $\mathbf{U}_k \in S^{b,3,b}(X)$ mit $\text{length}(\mathbf{U}_k) = n+1-k$ gibt, so man für $1 \leq k \leq m-n$ \mathbf{U}_k aus \mathbf{U}_{k-1} durch Entfernung der Mitte eines CTC-Tripels erhält, dann sagt man, dass man \mathbf{U}_{n-m} aus \mathbf{U}_0 durch die Entfernung von CTC-Tripel-Mitten erhält.

Die Aussagen a)-d) des Lemmas 7.3.8 übertragen sich auf CTC-Tripel und Quintupel-Strings.

17.3.6 Lemma. Es sei $\mathbf{U} = (U_0, \dots, U_n) \in S^{b,3,b}(X) \setminus S_F^{b,3,b}(X)$. Wenn man $W_0 = U_0$, $i := 0$ und $m_0 = 0$ setzt, und dann die Schritte

$$i := i + 1, \quad (17.3.9a)$$

$$N_i := \begin{cases} \emptyset, & \text{wenn } m_{i-1} + 1 = n, \\ \{k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, n-1\} \mid (W_{i-1}, U_k, U_{k+1}) \text{ ist kein CTC-Tripel}\}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (17.3.9b)$$

$$m_i := \begin{cases} n, & \text{wenn } N_i = \emptyset, \\ \min N_i & \text{sonst,} \end{cases} \quad (17.3.9c)$$

$$W_i = U_{m_i}, \quad (17.3.9d)$$

wiederholt, bis $m_i = n$ ist, und dann $i_* := i$ und $\mathbf{W}_{\mathbf{U}} := (W_0, \dots, W_{i_*})$ setzt, so folgt:

a) Es gilt für alle $j \in \{1, \dots, i_* - 1\}$, so dass $m_{j-1} + 1 \neq m_j$ ist:

- Es ist $m_{j-1} + 1 < m_j$.
- Es gilt für alle $k \in \{m_{j-1} + 1, \dots, m_j - 1\}$, dass (U_{k-1}, U_k, U_{k+1}) und (W_{j-1}, U_k, W_j) CTC-Tripel sind.

b) Es gilt für alle $j \in \{1, \dots, i_* - 1\}$, dass $(U_{m_{j-1}}, U_{m_j}, U_{m_{j+1}})$ genau dann ein CTC-Tripel ist, wenn $U_{m_{j-1}} = U_{m_j}$ ist.

c) Es ist $\mathbf{W}_{\mathbf{U}}$ ein CTC-Tripel-freier String gebildet mit Elementen aus X , d.h. es gilt $\mathbf{W}_{\mathbf{U}} \in S_F^{b,3,b}(X)$.

d) Man erhält \mathbf{W}_U durch Entfernung von CTC-Tripel-Mitten aus U .

Beweis. Die Beweise im Lemma 7.3.8 übertragen sich, wenn man überall Konvexitätstri-
pel durch CTC-Tripel ersetzt. Dabei gilt:

- a) An Stelle des Lemmas 7.2.5 wird das Lemma 17.2.4 angewendet.
- b) Die Anwendung von Lemma 7.2.3.c) wird durch die Anwendung von Lemma 17.2.3.c) ersetzt.
- c) An Stelle des Lemmas 7.2.6 wird das Lemma 17.2.5 verwendet.
- d) Die Argumentation überträgt sich. □

17.3.7 Bemerkung. Die Aussage e) im Lemma 7.3.8 überträgt sich **nicht** auf CTC-Tripel und Quintupel-Strings:

Betrachtet man $U = ((10, 2, 3), (4, 4, 4), (10, 2, 3)) \in (\mathbb{R}^3)^3$, dann ist N_1 wie im Lemma 17.3.6 eine leere Menge, und somit $\mathbf{W}_U = ((10, 2, 3), (10, 2, 3))$.

17.3.8 Definition. Es ist $\text{redu}^{\text{CTC}} : S^{b,3,b}(X) \rightarrow S_F^{b,3,b}(X)$ definiert durch

$$\text{redu}^{\text{CTC}}(U) := \begin{cases} U, & \text{wenn } U \in S_F^{b,3,b}(X), \\ \mathbf{W}_U & \text{wie im Lemma 17.3.6, sonst.} \end{cases} \quad (17.3.10)$$

Der Satz 7.3.10 überträgt sich:

17.3.9 Satz. Es seien $U, U' \in S^{b,3,b}(X)$ so, dass man U' aus U durch die Entfernung von CTC-Tripel-Mitten erhält. Dann gilt:

$$\text{redu}^{\text{CTC}}(U') = \text{redu}^{\text{CTC}}(U). \quad (17.3.11)$$

Beweis. Der Beweis des Satzes 7.3.10 überträgt sich. Die Verweise auf das Lemma 7.3.8. sind durch Verweise auf das Lemma 17.3.6 zu ersetzen, die auf das Lemma 7.2.3 durch solche auf das Lemma 17.2.3. □

Das Korollar 7.3.11 geht über in:

17.3.10 Korollar. Es sei $U \in S^{b,3,b}(X)$ gegeben.

- a) Wenn $\text{redu}^{\text{CTC}}(U) \neq U$ ist, dann erhält man $\text{redu}^{\text{CTC}}(U)$ aus U durch die Entfernung von CTC-Tripel-Mitten.
- b) Es gilt für alle $W \in S^{b,3,b}(X)$ mit $W \neq \text{redu}^{\text{CTC}}(U)$, die man aus U durch die Entfernung von CTC-Tripel-Mitten erhält, dass man $\text{redu}^{\text{CTC}}(U)$ aus W durch die Entfernung von Konvexitätstri-
pel-Mitten erhält.
- c) Wenn $W \in S_F^{b,3,b}(X)$ ist und man W aus U durch die Entfernung von CTC-Tripel-Mitten erhält, dann ist $W = \text{redu}^{\text{CTC}}(U)$.

17. Quintupel-Strings mit und ohne CTC-Tripel

Beweis. Die Aussagen folgen unmittelbar aus dem Satz 17.3.9. \square

Die Definition 7.3.12 geht über in

17.3.11 Definition. Es sei eine nichtleere Menge Y und eine Abbildung $G : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ gegeben. Dann ist die *kanonische Erweiterung von G auf $S^{b,3,b}(X)$* die Abbildung

$$\text{ext}^{\text{CTC}}(G) := G \circ \text{redu}^{\text{CTC}} : S^{b,3,b}(X) \rightarrow Y. \quad (17.3.12)$$

17.3.12 Lemma. Es seien eine nichtleere Menge Y und eine Abbildung $G : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ gegeben. Dann gilt für alle $\mathbf{U}, \mathbf{W} \in S^{b,3,b}(X)$, so dass man \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch die Entfernung von Konvexitätstripel-Mitten erhält:

$$\text{ext}^{\text{CTC}}(G)(\mathbf{W}) = \text{ext}^{\text{CTC}}(G)(\mathbf{U}). \quad (17.3.13)$$

Beweis. Der Satz 17.3.9 liefert, dass $\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U}) = \text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{W})$ ist. Dann gewinnt man mit der Definition von $\text{ext}^{\text{CTC}}(G)$ die gewünschte Gleichheit. \square

17.3.13 Definition. Für $\mathbf{U} = (U_0, \dots, U_n) \in B \times X^3 \times B \cup S(B \times X^3 \times B)$ und $\mathbf{W} := (W_0, \dots, W_{n+1}) \in S(B \times X^3 \times B)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Dann sagt man, dass \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch Wiederholung einer Quintupel-Mitte erzeugt wird, wenn es ein $k \in \{0, \dots, n\}$ gibt, so dass für $(l_k, (x_k, y_k, z_k), r_k) := U_k$ gilt:

$$W_i = U_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } i < k, \quad (17.3.14)$$

$$W_k = (l_k, (x_k, y_k, y_k), 1), \quad W_{k+1} = (1, (y_k, y_k, z_k), r_k), \quad (17.3.15)$$

$$W_{i+1} = U_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ mit } i > k. \quad (17.3.16)$$

17.3.14 Bemerkung. Für \mathbf{U} und \mathbf{W} wie in Def. 17.3.13, so dass \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch Wiederholung einer Quintupel-Mitte erzeugt wird, erkennt man dass:

- a) Es ist $\mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X)$ genau dann, wenn $\mathbf{W} \in S^{b,3,b}(X)$.
- b) Wenn $\mathbf{W} \in S_F^{b,3,b}(X)$, dann ist $\mathbf{U} \in S_F^{b,3,b}(X)$, aber in der Gegenrichtung gilt die Folgerung offensichtlich nicht.

17.3.15 Definition. Für $\mathbf{U}, \mathbf{W} \in S(B \times X^3 \times B)$ mit $\text{length}(\mathbf{W}) > \text{length}(\mathbf{U})$ gilt: Man sagt, dass \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch Wiederholung von Quintupel-Mitten erzeugt wird, wenn entweder

- i) $\text{length}(\mathbf{W}) = \text{length}(\mathbf{U}) + 1$ ist, und \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch Wiederholung einer Quintupel-Mitte erzeugt wird, oder
- ii) $\text{length}(\mathbf{W}) > \text{length}(\mathbf{U}) + 1$ ist, und für $m := \text{length}(\mathbf{W}) - \text{length}(\mathbf{U}) - 1$ gilt, dass es $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_m \in S(B \times X^3 \times B)$ gibt, so dass für $\mathbf{U}_0 := \mathbf{U}$ und $\mathbf{U}_{m+1} := \mathbf{W}$ gilt, dass für alle $k = 1, \dots, m+1$ gilt, dass \mathbf{U}_k aus \mathbf{U}_{k-1} durch Wiederholung einer Quintupel-Mitte erzeugt wird.

17.3.16 Definition. Für $\mathbf{U} \in B \times X^3 \times B$ und $\mathbf{W} \in S(B \times X^3 \times B)$ gilt: Man sagt, dass \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch Wiederholung von Quintupel-Mitten erzeugt wird, wenn entweder

- i) $\text{length}(\mathbf{W}) = 2$ ist, und \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch Wiederholung einer Quintupel-Mitte erzeugt wird, oder
- ii) $\text{length}(\mathbf{W}) > 2$ ist, und für $m := \text{length}(\mathbf{W}) - 2$ gilt, dass es $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_m \in S(B \times X^3 \times B)$ gibt, so dass für $\mathbf{U}_0 := \mathbf{U}$, $\mathbf{U}_{m+1} := \mathbf{W}$ gilt, dass für alle $k = 1, \dots, m+1$ gilt, dass \mathbf{U}_k aus \mathbf{U}_{k-1} durch Wiederholung einer Quintupel-Mitte erzeugt wird.

17.3.17 Definition. a) Es sei $F : S^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ gegeben.

Dann sagt man, dass F *bezüglich der Wiederholung von Quintupel-Mitten invariant* ist, wenn für alle $\mathbf{U}, \mathbf{W} \in S^{b,3,b}(F)$, so dass \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch Wiederholung von Quintupel-Mitten erzeugt wird, gilt, dass:

$$F(\mathbf{U}) = F(\mathbf{W}). \quad (17.3.17)$$

b) Es sei $G : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ gegeben.

Dann sagt man, dass G *bezüglich der Wiederholung von Quintupel-Mitten invariant* ist, wenn $\mathbf{U}, \mathbf{W} \in S_F^{b,3,b}(F)$, so dass \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch Wiederholung von Quintupel-Mitten erzeugt wird, gilt, dass

$$G(\mathbf{U}) = G(\mathbf{W}). \quad (17.3.18)$$

18. Stückweise im Intervallinneren affine Funktionen, Hysterese-Operatoren auf dem entsprechenden Funktionenraum und die von ihnen generierten Funktionen auf Quintupel-Strings

In diesem Abschnitt sei ein topologischer Vektorraum X und eine Endzeit $T > 0$ gegeben. Es sei $B := \{0, 1\}$.

18.1. Im Inneren von Intervallen affine Funktionen

18.1.1 Definition. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ und eine Funktion $u : [0, T] \rightarrow X$ gegeben. Man sagt, dass u *im Inneren von $[t_a, t_b]$ affin ist* genau dann, wenn $u(t_a+)$ und $u(t_b-)$ existieren, und (vgl. (8.1.1) in der Def. 8.1.1 von affin auf $[t_a, t_b]$) gilt, dass

$$u(t) = \frac{t_b - t}{t_b - t_a} u(t_a+) + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} u(t_b-), \quad \forall t \in]t_a, t_b[. \quad (18.1.1)$$

18.1.2 Bemerkung. Es seien t_a, t_b und u wie in Def. 18.1.1, so dass u im Inneren von $[t_a, t_b]$ affin ist. Es seien $s_1, s_2, s_3, s_4 \in [t_a, t_b]$ mit $s_1 < s_2 < s_3 < s_4$ gegeben. Dann gilt:

- a) u ist auf $]t_a, t_b[$ stetig, ebenso auf $]t_a, s_3]$ und auf $[s_2, t_b[$.
- b) u ist im Inneren von $[s_1, s_4]$ affin.
- c) u ist auf $[s_2, s_3]$ affin und stetig.
- d) Für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt, dass

$$u((1 - \lambda)s_1 + \lambda s_4) = (1 - \lambda)u(s_1+) + \lambda u(s_4-), \quad (18.1.2)$$

$$u((1 - \lambda)s_2 + \lambda s_3) = (1 - \lambda)u(s_2) + \lambda u(s_3). \quad (18.1.3)$$

- e) Für alle Funktionen $v : [s_1, s_4] \rightarrow X$, die im Inneren von $[s_1, s_4]$ affin sind, gilt: Wenn $u(s_1+) = v(s_1+)$ und $u(s_4-) = v(s_4-)$ ist, dann stimmen u und v auf $]s_1, s_4[$ überein.

- f) Für alle Funktionen $v : [s_2, s_3] \rightarrow X$, die im Inneren von $[s_2, s_3]$ affin sind, gilt: Wenn $u(s_2) = v(s_2+)$ und $u(s_3) = v(s_3-)$ ist, dann stimmen u und v auf $]s_1, s_2[$ überein.
- g) Für alle affinen Funktionen $v : [s_1, s_4] \rightarrow X$ gilt: Wenn $u(s_1+) = v(s_1)$ und $u(s_4-) = v(s_4)$ ist, dann stimmen u und v auf $]s_1, s_4[$ überein.
- h) Für alle affinen Funktionen $v : [s_2, s_3] \rightarrow X$ gilt: Wenn $u(s_2) = v(s_2)$ und $u(s_3) = v(s_3)$ ist, dann stimmen u und v auf $[s_2, s_3]$ überein.
- i) Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und jede lineare Funktion $\alpha : [a, b] \rightarrow [s_1, s_4]$: $u \circ \alpha$ ist im Inneren von $[a, b]$ affin.
- j) Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und jede lineare Funktion $\alpha : [a, b] \rightarrow [s_2, s_3]$: $u \circ \alpha$ ist affin auf $[a, b]$.

18.1.3 Lemma. *Es seien eine Funktion $u : [0, T] \rightarrow X$ und $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben. Dann ist u im Inneren von $[t_a, t_b]$ affin genau dann, wenn es $u_a, u_b \in X$ gibt, so dass:*

$$u(t) = \frac{t_b - t}{t_b - t_a} u_a + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} u_b \quad \forall t \in]t_a, t_b[. \quad (18.1.4)$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition, da X ein topologischer Vektorraum ist. \square

Analog zum Lemma 8.1.3 gilt:

18.1.4 Lemma. *Es seien eine Funktion $u : [0, T] \rightarrow X$ und $t_a, t_b, t_c \in [0, T]$ mit $t_a < t_b < t_c$ gegeben. so dass u im Inneren von $[t_a, t_b]$ und in Inneren von $[t_b, t_c]$ affin ist. Dann gilt:*

a) u ist auf $]t_a, t_c[$ genau dann stetig, wenn

$$u(t_b+) = u(t_b-) = u(t_b). \quad (18.1.5)$$

b) u ist im Inneren $[t_a, t_c]$ genau dann affin, wenn (18.1.5) gilt und

$$u(t_b) = \frac{t_c - t_b}{t_c - t_a} u(t_a+) + \frac{t_b - t_a}{t_c - t_a} u(t_c-). \quad (18.1.6)$$

Beweis. a) Da u nach Voraussetzung auf $]t_a, t_b[$ und $]t_b, t_c[$ stetig ist, ergibt sich die Äquivalenz unmittelbar.

- b)
 - Wenn u im Inneren von $[t_a, t_c]$ affin und damit in t_b stetig ist, folgt (18.1.5) sofort, (18.1.6) ergibt sich mit (18.1.1).
 - Es seien (18.1.5) und (18.1.6) erfüllt. Dann erhält man mit Hilfe von (18.1.5), dass $v : [t_a, t_c] \rightarrow X$ definiert durch

$$v(t) := \begin{cases} u(t), & \text{wenn } t \in]t_a, t_c[, \\ u(t_a+), & \text{wenn } t = t_a, \\ u(t_c-), & \text{wenn } t = t_c, \end{cases} \quad (18.1.7)$$

18.2. Der Raum der Funktionen, die stückweise affin im Intervallinneren sind

eine wohldefinierte Funktion ist, die auf $[t_a, t_b]$ und auf $[t_b, t_c]$ affin ist. Dann liefert (18.1.6) zusammen mit dem Lemma 8.1.3, dass v auf $[t_a, t_c]$ affin ist. Daraus ergibt sich, dass u im Inneren von $[t_a, t_c]$ affin ist. \square

Das Lemma 8.1.4 geht über in

18.1.5 Lemma. *Es seien eine Funktion $u : [0, T] \rightarrow X$ und $t_a, t_b, t_c, t_d \in [0, T]$ mit $t_a < t_b < t_c < t_d$ gegeben, so dass u im Inneren von $[t_a, t_c]$ und von $[t_b, t_d]$ affin ist. Dann ist u im Inneren von $[t_a, t_d]$ affin.*

Beweis. Definiert man $v : [t_a, t_d] \rightarrow X$ durch

$$v(t) := \begin{cases} u(t), & \text{wenn } t \in]t_a, t_d[, \\ u(t_a+), & \text{wenn } t = t_a, \\ u(t_d-), & \text{wenn } t = t_d, \end{cases} \quad (18.1.8)$$

dann liefern die Voraussetzungen, dass v auf $[t_a, t_c]$ und auf $[t_b, t_d]$ affin ist. Nach dem Lemma 8.1.4 ist v somit auf $[t_a, t_d]$ affin, und daher u im Inneren von $[t_a, t_d]$ affin. \square

18.2. Der Raum der Funktionen, die stückweise affin im Intervallinneren sind

18.2.1 Definition. Wenn es $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass u im Inneren von $[t_{i-1}, t_i]$ affin ist, dann gilt:

- a) Man nennt dann $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine *verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung* von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u .
- b) Man bezeichnet u als *stückweise affin im Intervallinneren*.

18.2.2 Definition. Es bezeichnet $\text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ die Menge der Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$, die stückweise affin im Intervallinneren sind.

18.2.3 Bemerkung. Es sei $u \in C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ geben, und es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u . Dann ist $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ auch eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u .

18.2.4 Bemerkung. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ geben, und es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

- a) Dann ist u genau dann eine stückweise affine Funktion, wenn $u(t_0) = u(t_0+)$, $u(t_n) = u(t_n-)$ und $u(t_i-) = u(t_i) = u(t_i+)$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt.
- b) Es ist u eine stückweise affine Funktion genau dann, wenn für alle $i = 0, \dots, n$ gilt, dass u zur Zeit t_i stetig ist.

c) Es ist u eine stückweise affine Funktion genau dann, wenn u eine stetige Funktion ist.

18.2.5 Bemerkung. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ geben, und es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u . Dann ist jede Verfeinerung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = T$ von $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ wieder eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

Das Lemma 8.2.5 geht über in

18.2.6 Lemma. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u . Wenn man $s_0 = 0$, $i = 0$, und $m_0 = 0$ setzt, und dann die Setzungen

$$i := i + 1, \quad (18.2.1)$$

$$m_i := \max\{k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, n\} \mid u \text{ ist in Inneren von } [t_{i-1}, t_k] \text{ eine affine Funktion}\}, \quad (18.2.2)$$

$$s_i := t_{m_i}; \quad (18.2.3)$$

wiederholt, bis $m_i = n$ ist, dann ist $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_i = T$ die eindeutig definierte verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u , so dass für alle $i = 1, \dots, m - 1$ u auf $[s_{i-1}, s_{i+1}]$ nicht affin ist.

Beweis. Der Beweis des Lemmas 8.2.5 überträgt sich, an Stelle des Lemmas 8.1.4 muss das Lemma 18.1.5 verwendet werden. \square

18.2.7 Definition. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ gegeben. Wenn $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u ist, so dass für alle $i = 1, \dots, n - 1$ die Funktion u im Inneren von $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ nicht affin ist, dann ist $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die verallgemeinerte Standard-Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

Das Lemma 8.2.7 geht über in

18.2.8 Lemma. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die verallgemeinerte Standard-Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u . Dann gilt für $i = 1, \dots, n$, und $s \in [t_{i-1}, t_i]$, dass

$$t_i = \max\{t \in [s, T] \mid u \text{ ist im Inneren von } [t_{i-1}, t] \text{ eine affine Funktion}\}. \quad (18.2.4)$$

Beweis. Der Beweis des Lemmas 8.2.7 überträgt sich, der Verweis auf das Lemma 8.1.4 muss durch einen auf das Lemma 18.1.5 ersetzt werden. \square

Aus dem Lemma folgt sofort

18.2.9 Korollar. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ gegeben. Dann ist jede verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u eine Verfeinerung der verallgemeinerten Standard-Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

18.2.10 Lemma. Es sei $u, v \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ sowohl eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u als auch eine bezüglich v .

Dann gilt $u = v$ auf $[0, T]$ genau dann, wenn

$$u(t_i-) = v(t_i-), \quad u(t_i) = v(t_i), \quad u(t_i+) = v(t_i+), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (18.2.5)$$

Beweis. Folgt sofort durch Ausnutzung von (18.1.1). \square

18.3. Verbindung zwischen stückweise im Intervallinneren affinen Funktionen und Quintupel-Strings

18.3.1 Definition. Es sei $\mathbf{V} = ((x_0, y_0, z_0), \dots, (x_m, y_m, z_m)) \in (X^3)^{m+1}$ mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Dann ist $\pi_{\text{pw.af.int.}}^*[\mathbf{V}] \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ die Funktion, die für alle $i = 0, \dots, m$ zur Zeit $t_i := \frac{i}{n}T$ gleich y_i ist, so dass außerdem für alle $k = 1, \dots, n$ gilt, dass die Funktion in Inneren von $[t_{k-1}, t_k]$ affin ist, und dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}^*[\mathbf{V}](t_{k-1}+) = z_{k-1}, \quad \pi_{\text{pw.af.int.}}^*[\mathbf{V}](t_k-) = x_k. \quad (18.3.1)$$

Also gilt

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}^*[\mathbf{V}](t) = \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} z_{i-1} + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} x_i, \quad \forall t \in]t_{i-1}, t_i[, \quad i = 1, \dots, m, \quad (18.3.2)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}^*[\mathbf{V}](t_i) = y_i, \quad \forall i = 0, \dots, m. \quad (18.3.3)$$

18.3.2 Definition. a) Es sei $\mathbf{U} = ((l_0, (x_0, y_0, z_0), r_0) \dots, (l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n)) \in S^{b,3,b}(X)$.

Es sei $j_0 = 0$ und $j_k := k + \sum_{i=1}^k (r_{i-1} + l_i)$ für $k = 1, \dots, n$.

Dann ist $\text{repr}(\mathbf{U}) := (V_0, \dots, V_{j_n}) \in (X^3)^{j_n+1}$ definiert durch:

i) $V_0 := (x_0, y_0, z_0)$. Wenn $r_0 = 1$ ist, dann ist $V_1 := (z_0, z_0, z_0)$.

ii) Für alle $k = 1, \dots, n-1$ gilt $V_{j_k} := (x_k, y_k, z_k)$ und:

- Wenn $l_k = 1$ ist, dann ist $V_{j_k-1} := (z_k, z_k, z_k)$.

- Wenn $r_k = 1$ ist, dann ist $V_{j_k+1} := (x_k, x_k, x_k)$.

iii) Es ist $V_{j_n} := (x_n, y_n, z_n)$. Wenn $l_n = 1$ ist, dann ist $V_{j_n-1} := (z_n, z_n, z_n)$.

b) Die in a) definierte Abbildung $\text{repr} : S^{b,3,b}(X) \rightarrow \bigcup_{m \in \mathbb{N}_{\geq 1}} (X^3)^{m+1}$ ist der *Repräsentations-Operator* auf $S^{b,3,b}(X)$.

c) Die Abbildung

$$\pi_{\text{pw.af.int.}} := \pi_{\text{pw.af.int.}}^* \circ \text{repr} : S^{b,3,b}(X) \rightarrow \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X) \quad (18.3.4)$$

ist der *Interpolations-Operator* auf $S^{b,3,b}(X)$.

18.3.3 Bemerkung. Es sei $\mathbf{U} = ((l_0, (x_0, y_0, z_0), r_0) \dots, (l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n)) \in S^{b,3,b}(X)$. Es seien j_0, \dots, j_n wie in Def. 18.3.2. Es sei $t_i := \frac{i}{j_n}$ für alle $i = 0, \dots, j_n$. Dann gilt

a) Für alle $i = 1, \dots, j_n$ ist $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ im Inneren von $[t_{i-1}, t_i]$ affin.

b) Es ist

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_0}) = y_0, \quad \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_0+}) = z_0 = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_0+r_0+}). \quad (18.3.5)$$

- Wenn $r_0 = 1$ ist, dann ist $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $]t_0, t_1]$ gleich z_0 und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_1+) = z_0$.

c) Für alle $k = 1, \dots, n-1$ gilt

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k}-) = x_k = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k-l_k}-), \quad (18.3.6)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k}) = y_k, \quad (18.3.7)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k}+) = z_k = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k+r_k}+), \quad (18.3.8)$$

und:

- Wenn $l_k = 1$ ist, dann ist $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $[t_{j_{k-1}}, t_{j_k}[$ gleich x_k .
- Wenn $r_k = 1$ ist, dann ist $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $]t_{j_k}, t_{j_{k+1}}]$ gleich z_k .

d) Es gilt

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_n}-) = x_n = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_n-l_n}-), \quad \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_n}) = y_n. \quad (18.3.9)$$

- Wenn $l_n = 1$ ist, dann ist $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $[t_{j_{n-1}}, t_{j_n}[$ gleich x_n .

e) Für alle $k = 1, \dots, n$ gilt:

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{k-1}}) = y_{k-1}, \quad (18.3.10a)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t) = z_{k-1}, \quad \forall t_{j_{k-1}} < t \leq t_{j_{k-1}+r_{k-1}}, \quad (18.3.10b)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t) = \frac{t_{j_k-l_k} - t}{t_{j_k-l_k} - t_{j_{k-1}+r_{k-1}}} z_{k-1} + \frac{t - t_{j_{k-1}+r_{k-1}}}{t_{j_k-l_k} - t_{j_{k-1}+r_{k-1}}} x_k, \quad (18.3.10c)$$

$$\forall t \in]t_{j_{k-1}+r_{k-1}}, t_{j_k-l_k}[$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t) = x_k, \quad \forall t_{j_k-l_k} \leq t < t_{j_k}, \quad (18.3.10d)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k}) = y_k. \quad (18.3.10e)$$

Dabei ist für $r_{k-1} = 0$ (18.3.10b) eine Aussage über die leere Menge, ebenso (18.3.10d) für $l_k = 0$.

18.3.4 Bemerkung. Es sei $\mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X)$ gegeben. Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ so, dass $\text{repr}(\mathbf{U}) \in (X^3)^{m+1}$. Es sei $t_i := \frac{i}{m}T$ für alle $i = 0, \dots, m$.

Da $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ im Inneren von $[t_{i-1}, t_i]$ für $i = 1, \dots, m$ affin ist, folgt unmittelbar, dass $0 = t_0 < \dots < t_m = T$ eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ ist.

18.3.5 Lemma. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ und eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich u gegeben.

Es seien r_0, \dots, r_n und l_0, \dots, l_n in $\{0, 1\}$ definiert durch $r_n = 1$, $l_0 = 1$ und

$$r_i := \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(s_i+) = u(s_{i+1}-), \\ 1, & \text{wenn } u(s_i) = u(s_i+), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \forall i = 0, \dots, n-1. \quad (18.3.11)$$

$$l_i := \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(s_{i-1}+) = u(s_i-), \\ 1, & \text{wenn } u(s_i-) = u(s_i), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (18.3.12)$$

Dann gilt für

$$\mathbf{U} := ((l_i, (u(s_i-), u(s_i), u(s_i+)), r_i))_{i=0}^n : \quad (18.3.13)$$

a) Es gilt $\mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X)$.

b) Es gibt eine stückweise lineare zulässige Zeittransformation $\alpha_u : [0, T] \rightarrow [0, T]$, so dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = u \circ \alpha_u$.

Beweis. a) Betrachtet man die Definition von r_0, \dots, r_n und von l_0, \dots, l_n , und die Definition $u(t_0-) = u(t_0)$ und $u(t_n+) = u(t_n)$, dann sieht man mit der Definition 17.3.1 von $S^{3,b,3}(X)$, dass \mathbf{U} ein Element dieser Menge ist.

b) Es seien j_0, \dots, j_n wie in Def. 18.3.2. Es sei $t_i := \frac{i}{j_n}$ für alle $i = 0, \dots, j_n$. Für alle $i = 1, \dots, n$ wird jetzt α_u auf $[t_{j_{i-1}}, t_{j_i}]$ als monoton steigende Funktion definiert, die diesen Intervall auf $[s_{i-1}, s_i]$ abbildet; wobei dabei noch gilt, dass

$$\alpha_u(t_{j_{i-1}}) = s_{i-1}, \quad \alpha_u(t_{j_i}) = s_i. \quad (18.3.14)$$

Dann liefern (18.3.10a) und (18.3.10e), dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{i-1}}) = u(s_{i-1}) = u \circ \alpha_u(t_{j_{i-1}}), \quad (18.3.15)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_i}) = u(s_i) = u \circ \alpha_u(t_{j_i}). \quad (18.3.16)$$

Also muss nur noch gezeigt werden, dass $u \circ \alpha$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf den offenen Intervall $]t_{j_{i-1}}, t_{j_i}[$ übereinstimmen.

- Wenn $u(s_{i-1}+) = u(s_i-)$:

Dann ist u im Inneren $[s_{i-1}, s_i]$ konstant gleich $u(s_i-)$. Andererseits liefert (18.3.10), dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ im Inneren von $[t_{j_{i-1}}, t_{j_i}]$ konstant gleich $u(s_i-)$ ist.

Definiert man jetzt α_u auf $[t_{j_{i-1}}, t_{j_i}]$ als die lineare Funktion, so dass (18.3.14) gilt, dann bildet diese $]t_{j_{i-1}}, t_{j_i}[$ auf $]s_{i-1}, s_i[$ ab.

Dies liefert, dass $u \circ \alpha$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $]t_{j_{i-1}}, t_{j_i}[$ übereinstimmen.

- Wenn $u(s_{i-1}+) \neq u(s_i-)$:

Dann sei α_u auf $[t_{j_{i-1}+r_{i-1}}, t_{j_i-l_i}]$ die lineare Funktion mit $\alpha_u(t_{j_{i-1}+r_{i-1}}) = s_{i-1}$ und $\alpha_u(t_{j_i-l_i}) = s_i$.

- Wenn $r_{i-1} = 1$ ist, dann sei α_u auf $[t_{j_{i-1}}, t_{j_{i-1}+1}[$ konstant gleich s_{i-1} .
- Wenn $l_i = 1$ ist, dann sei α_u auf $]t_{j_{i-1}}, t_{j_i}]$ konstant gleich s_i .

Da $j_i = j_{i-1} + r_{i-1} + l_i$ ist, sieht man, dass so α_u auf $[t_{j_{i-1}}, t_{j_i}]$ wohldefiniert ist, und (18.3.14) gilt. Weiterhin ist α_u auf $[t_{j_{i-1}+r_{i-1}}, t_{j_i-l_i}]$ eine lineare Abbildung nach $[s_{i-1}, s_i]$ und somit ist $u \circ \alpha_u$ im Inneren dieses Intervalls affin. Die gilt auch für $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ und es gilt

$$u \circ \alpha_u(t_{j_{i-1}+r_{i-1}}+) = u(s_{i-1}+) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{i-1}+r_{i-1}}), \quad (18.3.17)$$

$$u \circ \alpha_u(t_{j_i-l_i}-) = u(s_i-) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_i-r_i}). \quad (18.3.18)$$

Also stimmen $u \circ \alpha_u$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ im Inneren von $[t_{j_{i-1}+r_{i-1}}, t_{j_i-l_i}]$ überein.

- Wenn $r_{i-1} = 1$, dann ist, per Definition, $u \circ \alpha_u$ auf $[t_{j_{i-1}}, t_{j_{i-1}+1}[$ konstant gleich $u(s_{i-1})$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ ist analog, per Definition, auf dem gleichen Intervall konstant gleich $u(s_{i-1}+)$. Da aber $r_{i-1} = 1$ jetzt außerdem impliziert, dass $u(s_{i-1}) = u(s_{i-1}+)$, sieht man, dass die beiden Funktionen auf dem betrachteten Intervall übereinstimmen.
- Wenn $l_i = 1$ ist, dann ist, per Definition, $u \circ \alpha_u$ auf $]t_{j_{i-1}}, t_{j_i}[$ konstant gleich $u(s_i)$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ ist analog, per Definition, auf dem gleichen Intervall konstant gleich $u(s_i+)$. Da aber $l_i = 1$ jetzt außerdem impliziert, dass $u(s_i-) = u(s_i)$, sieht man, dass die beiden Funktionen auf dem betrachteten Intervall übereinstimmen.

Somit sieht man, dass $\alpha_u = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $]t_{j_{i-1}}, t_{j_i}[$ gilt.

□

Teile des Lemmas 8.3.3 gehen über in :

18.3.6 Lemma. *Es sei $\mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X)$ gegeben. Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ so, dass $\text{repr}(\mathbf{U}) \in (X^3)^{m+1}$. Es sei $t_i := \frac{i}{m}T$ für alle $i = 0, \dots, m$. Dann gibt es eine stückweise lineare zulässige Zeittransformation $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}} : [0, T] \rightarrow [0, T]$, so dass*

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U})] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}. \quad (18.3.19)$$

Beweis. Für $\mathbf{U} \in S_F^{b,3,b}(X)$ gilt (18.3.19), wenn man $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}} : [0, T] \rightarrow [0, T]$ gleich der Identität auf $[0, T]$ setzt.

Im Folgenden sei deshalb $\mathbf{U} = (U_0, \dots, U_n) \in S^{b,3,b}(X) \setminus S_F^{b,3,b}(X)$ beliebig. Es seien i_* , $\mathbf{W}_{\mathbf{U}}$ und W_i, N_i, m_i für $i = 0, \dots, i_*$ wie im Lem. 17.3.6 gegeben. Dann ergibt sich aus Def. 17.3.8 und Lemma 17.3.6, dass

$$\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U}) = \mathbf{W}_{\mathbf{U}} = (W_0, \dots, W_{i_*}) = (U_{m_0}, \dots, U_{m_{i_*}}). \quad (18.3.20)$$

Es sei

$$(l_i, (x_i, y_i, z_i), r_i) := U_i, \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (18.3.21)$$

Es sei, wie in Def. 18.3.2, $j_0 = 0$ und $j_k := k + \sum_{i=1}^k (r_{i-1} + l_i)$ für $k = 1, \dots, n$.

Es sei

$$(l'_i, (x'_i, y'_i, z'_i), r'_i) := W_i, \quad \forall i = 0, \dots, i_*. \quad (18.3.22)$$

Es sei $j'_0 = 0$ und $j'_k := k + \sum_{i=1}^k (r'_{i-1} + l_i)$ für $k = 1, \dots, i_*$, wie in Def. 18.3.2 bei der Bestimmung von $\text{repr}(\mathbf{W}_{\mathbf{U}}) =: (V'_0, \dots, V'_{j'_{i_*}})$.

Es seien

$$t_k := \frac{k}{j_n} T, \quad \forall k = 0, \dots, j_n, \quad s_i = \frac{i}{j'_{i_*}} T, \quad \forall i = 0, \dots, j'_{i_*}. \quad (18.3.23)$$

Zeigt man nun für alle $i = 1, \dots, i_*$, dass man $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}$ als stückweise lineare, monoton steigende Funktion von $[t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_i}}]$ nach $[s_{j'_{i-1}}, s_{j'_i}]$ definieren kann, so dass

$$\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}(t_{j_{m_{i-1}}}) = s_{j'_{i-1}}, \quad \text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}(t_{j_{m_i}}) = s_{j'_i}, \quad (18.3.24)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}(t), \quad \forall t \in [t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_i}}], \quad (18.3.25)$$

dann folgt die Aussage.

Es sei $i \in \{1, \dots, i_*\}$ beliebig.

Aus (18.3.10) folgt, dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s_{j'_{i-1}}) = y'_{i-1}, \quad (18.3.26a)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s) = z'_{i-1}, \quad \forall s_{j'_{i-1}} < s \leq s_{j'_{i-1}+r'_{i-1}}, \quad (18.3.26b)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s) &= \frac{s_{j'_i-l'_i} - s}{s_{j'_i-l'_i} - s_{j'_{i-1}+r'_{i-1}}} z'_{i-1} + \frac{s - s_{j'_{i-1}+r'_{i-1}}}{s_{j'_i-l'_i} - s_{j'_{i-1}+r'_{i-1}}} x'_k, \\ &\quad \forall s \in]s_{j'_{i-1}+r'_{i-1}}, s_{j'_i-l'_i}[, \end{aligned} \quad (18.3.26c)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s) = x'_i, \quad \forall s_{j'_i-l'_i} \leq s < s_{j'_i}, \quad (18.3.26d)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s_{j'_i}) = y'_i. \quad (18.3.26e)$$

Mit (18.3.10a) und (18.3.10e) erhält man

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s_{j'_{i-1}}) = y'_{i-1} = y_{m_{i-1}} = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{m_{i-1}}}), \quad (18.3.27)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s_{j'_i}) = y'_i = y_{m_i} = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{m_i}}) \quad (18.3.28)$$

Wenn man also $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}$ so definiert, dass (18.3.24) gilt, muss die Aussage in (18.3.25) nur noch für das Innere des Intervalls bewiesen werden.

- Wenn $m_{i-1} + 1 = m_i$ ist:

Dann ist $l'_i = l_{m_i}$, $r'_{i-1} = r_{m_{i-1}} = r_{m_i-1}$ und somit $j'_i - j'_{i-1} = l_{m_i} - r_{m_{i-1}} = j_{m_i} - j_{m_{i-1}}$. Weiterhin gilt $z'_{i-1} = z_{m_{i-1}} = z_{m_i-1}$, $y'_{i-1} = y_{m_{i-1}} = y_{m_i-1}$, $x'_i = x_{m_i}$ und $y'_i = y_{m_i}$.

Definiert man jetzt $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}$ auf $[t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_i}}] = [t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_i}}]$ als die lineare Funktion, so dass (18.3.24) gilt, so erhält man durch Kombination von (18.3.26) und (18.3.10) mit $k = m_i$, dass (18.3.25) gilt.

- Wenn $m_{i-1} + 1 \neq m_i$ ist:

Dann ist $m_{i-1} + 1 < m_i$. Für alle $k = m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1$ ergibt sich aus dem Lem. 17.3.6, dass (W_{i-1}, U_k, W_i) ein CTC-Tripel ist. Also gibt es $\lambda_{i,k} \in [0, 1]$, so dass

$$x_k = y_k = z_k = (1 - \lambda_{i,k}) z'_{i-1} + \lambda_{i,k} x'_i. \quad (18.3.29)$$

- Wenn $z'_{i-1} = x'_i =: \tilde{w}$:

Dann liefert (18.3.26), dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}]$ auf $]s'_{j_{i-1}}, s'_{j_i}[$ gleich \tilde{w} ist.

Mit (18.3.29) folgt, dass $x_k = y_k = z_k = \tilde{w}$ für $k = m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1$ gilt.

Weiterhin ist $\tilde{w} = z'_{i-1} = z_{m_{i-1}}$ und $\tilde{w} = x'_i = x_{m_i}$. Dann liefert (18.3.10), das $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $]t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_i}}[$ gleich \tilde{w} ist.

Definiert man also $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}$ auf $[t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_i}}]$ wieder als die lineare Funktion, so dass (18.3.24) erfüllt ist, dann gilt die Bedingung in (18.3.25) im Inneren des Intervalls. Wie oben erläutert, genügt es, diese Aussage zu zeigen.

- Wenn $z'_{i-1} \neq x'_i$:

- i) Es sei

$$\tilde{s}_{j_{m_{i-1}}} := s'_{j_{i-1}}, \quad s_* := s'_{j_{i-1}+r'_{i-1}}. \quad (18.3.30)$$

- * Wenn $r_{m_{i-1}} = 1$, dann sei $\tilde{s}_{j_{m_{i-1}}+1} := s_*$.

Wegen $r'_{i-1} = r_{m_{i-1}}$ gilt also

$$\tilde{s}_{j_{m_{i-1}}+r_{m_{i-1}}} = s_* = s'_{j_{i-1}+r'_{i-1}}. \quad (18.3.31)$$

- ii) Es sei

$$\tilde{s}_{j_{m_i}} := s'_{j_i}, \quad s^* := s'_{j_i-l'_i}. \quad (18.3.32)$$

- * Wenn $l_{m_i} = 1$, dann sei $\tilde{s}_{j_{m_i}-1} := s^*$.

Wegen $l'_i = l_{m_i}$ gilt

$$\tilde{s}_{j_{m_i}-l_{m_i}} = s'_{j_i-l'_i} = s^*. \quad (18.3.33)$$

- iii) Für alle $k = m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1$ sei

$$\tilde{s}_{j_k} := (1 - \lambda_{i,k}) s_* + \lambda_{i,k} s^*. \quad (18.3.34)$$

- * Wenn $l_k = 1$ ist, dann sei $\tilde{s}_{j_{k-1}} = \tilde{s}_{j_k}$.

- * Wenn $r_k = 1$ ist, dann sei $\tilde{s}_{j_{k+1}} = \tilde{s}_{j_k}$.

Die obigen Betrachtungen definieren $\tilde{s}_{j_{m_{i-1}}}, \dots, \tilde{s}_{j_{m_i}} \in [s'_{j_{i-1}}, s'_{j_i}]$ eindeutig.

Behauptung. Es gilt für alle $k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1\}$ mit $k < m_i - 1$:

$$\tilde{s}_{j_k} \leq \tilde{s}_{j_{k+1}}. \quad (18.3.35)$$

Beweis der Behauptung: Da nach Konstruktion (W_{i-1}, U_k, U_{k+1}) und (W_{i-1}, U_{k+1}, W_i) CTC-Tripel sind, ist somit (z_{i-1}, y_k, y_{k+1}) ein Konvexitätstrippel. Also gibt es ein $\lambda \in [0, 1]$, so dass $y_k = (1 - \lambda)z'_{i-1} + \lambda y_{k+1}$ ist. Dies liefert

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_{i,k}) z'_{i-1} + \lambda_{i,k} x'_i &= y_k = (1 - \lambda) z'_{i-1} + \lambda (1 - \lambda_{i,k+1}) z'_{i-1} + \lambda \lambda_{i,k+1} x'_i \\ &= (1 - \lambda + \lambda - \lambda \lambda_{i,k+1}) z'_{i-1} + \lambda \lambda_{i,k+1} x'_i. \end{aligned} \quad (18.3.36)$$

Also ist $\lambda_{i,k}(x'_i - z'_{i-1}) = \lambda \lambda_{i,k+1}(x'_i - z'_{i-1})$. Da $z'_{i-1} \neq x'_i$ ist, liefert dies, dass $\lambda_{i,k} = \lambda \lambda_{i,k+1} \leq \lambda_{i,k+1}$.

Daraus ergibt sich, dass

$$\tilde{s}_{j_k} = s_* + \lambda_{i,k}(s^* - s_*) \leq s_* + \lambda_{i,k+1}(s^* - s_*) = \tilde{s}_{j_{k+1}}. \quad (18.3.37)$$

■

Betrachtet man die anderen Definitionen, dann sieht man, dass $\tilde{s}_{j_{m_{i-1}}}, \dots, \tilde{s}_{j_{m_i}}$ eine steigende Kette von Elementen von $[s'_{j'_{i-1}}, s'_{j'_i}]$ ist.

Sei jetzt $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf $[t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_i}}]$ die stückweise lineare Funktion, so dass $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}(t_k) = \tilde{s}_k$ ist für alle $k = m_{i-1}, \dots, m_i$ und $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf $[t_{k-1}, t_k]$ linear ist für alle $k = m_{i-1} + 1, \dots, m_i$. Dann ist $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf $[t_{m_{i-1}}, t_{m_i}]$ monoton steigend und (18.3.24) gilt.

Somit muss nur noch gezeigt werden, dass $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}$ im Inneren von $[t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_i}}]$, übereinstimmen.

Behauptung. Wenn es ein $k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1\}$ gibt, so dass $\tilde{s}_{j_k} = s_*$ ist, dann gilt $r_{m_{i-1}} = 1$ und $y_{m_{i-1}+1} = \dots = y_k = z'_{i-1} = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s_*)$.

Beweis der Behauptung: Für alle $\ell \in \{y_{m_{i-1}+1}, \dots, k\}$ gilt $s_* \leq \tilde{s}_\ell \leq \tilde{s}_{j_k} = s_*$. Daraus folgt, dass $s_* = \tilde{s}_\ell$. Dann erkennt man mit (18.3.34), dass $\lambda_{i,\ell} = 0$ ist. Dann liefert (18.3.29), dass $y_\ell = z'_{i-1}$. Da dies für $\ell = m_{i-1} + 1$ mit (18.3.29) liefert, dass $x_{m_{i-1}+1} = y_{m_{i-1}+1} = z'_{i-1} = z_{m_{i-1}}$ ist und $\mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X)$ liegt, folgt daraus, dass $l_{m_{i-1}+1} = 1 = r_{m_{i-1}}$. Also ergibt sich aus (18.3.30) und (18.3.26b), dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s_*) = z'_{i-1}$. ■

Behauptung. Wenn es ein $k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1\}$ gibt, so dass $\tilde{s}_{j_k} = s^*$ ist, dann gilt $l_{m_i} = 1$ und $y_k = \dots = y_{m_{m_i-1}} = x'_i = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s^*)$.

Beweis der Behauptung: Für alle $\ell \in \{k, \dots, y_{m_{i-1}}\}$ gilt, dass $s^* \geq \tilde{s}_\ell \geq \tilde{s}_{j_k} = s^*$ ist. Daraus folgt, dass $s^* = \tilde{s}_\ell$. Anwendung von (18.3.34) liefert, dass $\lambda_{i,\ell} = 1$ ist. Dann liefert (18.3.29), dass $y_\ell = x'_i$. Für $\ell = m_i - 1$ liefert dies mit (18.3.29), dass $z_{m_{i-1}} = y_{m_i} = x'_i = x_{m_i}$. Da $\mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X)$ liegt, folgt daraus, dass $r_{m_{i-1}} = 1 = l_{m_i}$. Also ergibt sich aus (18.3.32) und (18.3.26d), dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s^*) = x'_i$. ■

Behauptung. Für alle $k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1\}$ mit $s_* < \tilde{s}_{j_k} < s^*$ ist $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](\tilde{s}_{j_k}) = y_k$.

Beweis der Behauptung: Kombiniert man (18.3.34), (18.3.30) und (18.3.32), so ergibt sich, dass

$$\tilde{s}_{j_k} := (1 - \lambda_{i,k}) s_{j'_{i-1}+r_{i-1}} + \lambda_{i,k} s_{j'_i-l_i}. \quad (18.3.38)$$

Anwendung von (18.3.26c) und (18.3.29) liefert $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](\tilde{s}_{j_k}) = y_k$. ■

- i) * Wenn $r_{m_{i-1}} = 1$, dann ist $r'_{i-1} = r_{m_{i-1}} = 1$. Aus (18.3.10b) für $k = m_{i-1} + 1$ folgt dann, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $]t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_{i-1}}+1}]$ konstant gleich $z_{m_{i-1}} = z'_{i-1}$ ist, während (18.3.26b) liefert, dass dies für $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}]$ auf $]\tilde{s}_{j_{m_{i-1}}}, \tilde{s}_{j_{m_{i-1}}+1}]$ gilt. Somit ergibt sich, dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf }]t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{m_{i-1}}+1}]. \quad (18.3.39)$$

Mit (18.3.10c) erkennt man, dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{m_{i-1}}+1}+) = z_{m_{i-1}} = z'_{i-1}. \quad (18.3.40)$$

- Wenn es ein $k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1\}$ gibt, so dass $\tilde{s}_{j_k} = s_*$ ist, dann sei k_* maximal mit dieser Eigenschaft. Mit der oben formulierten Aussage folgt dann, dass $y_{m_i+1}, \dots, y_{k_*} = z'_{i-1} = z_{m_{i-1}}$ ist. Mit (18.3.29) und (18.3.10) folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $]t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{k_*}+r_{k_*}}]$ gleich z'_{i-1} ist.

Da $\tilde{s}_{j_{k_*}} = s_*$ ist und damit $\tilde{s}_{j_{k_*}+r_{k_*}} = s_*$, folgt, dass $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}(t_{j_{k_*}+r_{k_*}}) = s_*$ ist. Andererseits gilt auch nach der Definition von $\tilde{s}_{j_{m_i}+1}$, dass $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}(t_{j_{m_i}+1}) = \tilde{s}_{j_{m_i}+1} = s_*$. Also ist, wegen der Monotonie, $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf $]t_{j_{m_i}+1}, t_{j_{k_*}+r_{k_*}}]$ konstant gleich s_* . Wie oben gezeigt, gilt jetzt $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](s_*) = z'_{i-1}$.

Somit stimmen $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf $]t_{j_{m_i}+1}, t_{j_{k_*}+r_{k_*}}]$ überein. Mit (18.3.39) erhält man

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf }]t_{j_{m_{i-1}}}, t_{j_{k_*}+r_{k_*}}]. \quad (18.3.41)$$

Da $z_{k_*} = y_{k_*} = z'_{i-1}$ ist, liefert (18.3.10c), dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{k_*}+r_{k_*}}+) = z'_{i-1}. \quad (18.3.42)$$

- Wenn für alle $k = m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1$ gilt, dass $\tilde{s}_{j_k} \neq s_*$ ist, dann sei $k_* := m_{i-1}$. Mit (18.3.39) und (18.3.40) sieht man, dass dann (18.3.41) und (18.3.42) erfüllt sind.
- * Wenn $r_{m_{i-1}} = 0$ ist, dann sei $k_* := m_{i-1}$. Dann gilt (18.3.41), da dies eine Aussage über die leere Menge ist. Und mit (18.3.10c) folgt, dass (18.3.42) gilt.

Betrachtet man die obigen Ausführungen, dann sieht man, dass in jedem der Fälle neben (18.3.41) und (18.3.42) auch noch

$$\text{redutrans}_{\mathbf{U}}(t_{j_{k_*}+r_{k_*}}) = s_* < \tilde{s}_{j_k}, \quad \forall k = k_* + 1, \dots, m_i \quad (18.3.43)$$

erfüllt ist.

ii) Es sei

$$k^* := \begin{cases} m_i, & \text{wenn } \tilde{s}_{j_k} \neq s^* \quad \forall k = m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1, \\ \min\{k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, m_i - 1\} \mid \tilde{s}_{j_k} = s^*\}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (18.3.44)$$

Dann ist $k_* < k^*$ und mit einer analogen Argumentation zu oben erhält man, dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf } [t_{j_{k^*}-l_{k^*}}, t_{j_{m_i}}[, \quad (18.3.45)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{k^*}-l_{k^*}}-) = x'_i, \quad (18.3.46)$$

$$\text{redutrans}_{\mathbf{U}}(t_{j_{k^*}-l_{k^*}}) = s^* > \tilde{s}_{j_k}, \quad \forall k = m_{i-1}, \dots, k^*. \quad (18.3.47)$$

iii) Aus (18.3.26c) und den Definitionen von s_* und von s^* folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}]$ im Inneren von $[s_*, s^*]$ affin ist und dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}](s_*+) = z'_{i-1}, \quad \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}](s_*-) = x'_i. \quad (18.3.48)$$

* Wenn $k_* + 1 = k^*$ ist:

Aus (18.3.10c) für $k := k^*$ folgt dann, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ im Innern von $[t_{j_{k_*}+r_{k_*}}, t_{j_{k^*}-l_{k^*}}]$ affin ist. Da $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ den Intervall $[t_{j_{k_*}+r_{k_*}}, t_{j_{k^*}-l_{k^*}}]$ linear und monoton steigend auf den Intervall $[s_*, s^*]$ abbildet, folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ im Inneren von $[t_{j_{k_*}+r_{k_*}}, t_{j_{k^*}-l_{k^*}}]$ affin ist, und dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}(t_{j_{k_*}+r_{k_*}}+) = z'_{i-1}, \quad (18.3.49)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}(t_{j_{k^*}-l_{k^*}}-) = x'_i. \quad (18.3.50)$$

Mit (18.3.42) und (18.3.46) erhält man für $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ die gleichen Grenzwerte. Somit stimmen $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ im Innern von $[t_{j_{k_*}+r_{k_*}}, t_{j_{k^*}-l_{k^*}}]$ überein. Zusammen mit (18.3.41) und (18.3.45) ergibt sich, dass die beiden Funktionen im Inneren von $[t_{j_{m-1}}, t_{j_m}]$ übereinstimmen, also die noch zu beweisende Aussage.

* Wenn $k_* + 1 \neq k^*$ ist:

Dann ist $k_* + 1 < k^*$, und es gilt für alle $k = k_* + 1, \dots, k^* - 1$, mit Hilfe der obigen Aussagen und der Stetigkeit von $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}]$ in \tilde{s}_{j_k} , dass

$$\begin{aligned} x_k &= y_k = z_k = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}](\tilde{s}_{j_k}) \\ &= \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}](\tilde{s}_{j_k}-) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W_U}](\tilde{s}_{j_k}+). \end{aligned} \quad (18.3.51)$$

Aus (18.3.10c) für $k = k_* + 1$ folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{k_*}+1}-) = y_{k_*+1}$. Da $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ den Intervall $[t_{j_{k_*}+r_{k_*}}, t_{j_{k_*+1}-l_{k_*+1}}]$ linear und monoton

steigend auf den Intervall $[s_*, \tilde{s}_{k_*+1}]$ abbildet, folgt mit (18.3.48) und (18.3.51), dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}(t_{j_{k_*}+r_{k_*}}-) = z'_{i-1}, \quad (18.3.52)$$

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}(t_{j_{k_*+1}-l_{k_*+1}}-) = y_{k_*+1}. \quad (18.3.53)$$

Nutzt man noch (18.3.42) aus, dann sieht man, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ im Inneren des Intervalls $[t_{j_{k_*}+r_{k_*}}, t_{j_{k_*+1}-l_{k_*+1}}]$ affin sind, und dass die Grenzwerte auf dem Rand übereinstimmen. Da beide Funktionen im Inneren des Intervalls affin sind, folgt, dass sie auf $]t_{j_{k_*}+r_{k_*}}, t_{j_{k_*+1}-l_{k_*+1}}[$ übereinstimmen.

- Wenn $l_{k_*+1} = 1$ ist, dann ist $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf $[t_{j_{k_*+1}-l_{k_*+1}}, t_{j_{k_*+1}}]$ konstant gleich $\tilde{s}_{j_{k_*+1}}$ und somit $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf diesem Intervall gleich $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](\tilde{s}_{j_{k_*+1}}) = y_{k_*+1}$, d.h. gleich dem Wert, den $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf diesem Intervall annimmt. Zusammen mit dem oben gesagten folgt, dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf }]t_{j_{k_*}+r_{k_*}}, t_{j_{k_*+1}}]. \quad (18.3.54)$$

- Wenn $l_{k_*+1} = 0$ ist, dann gilt (18.3.54) ebenfalls.

Mit (18.3.41) ergibt sich, dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf }]t_{j_{m_i-1}}, t_{j_{k_*+1}}]. \quad (18.3.55)$$

Eine analoge Argumentation liefert, dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf } [t_{j_{k_*-1}}, t_{j_{m_i}}[. \quad (18.3.56)$$

Es sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k_* + 1 < k$ und $k \leq k^* - 1$ beliebig.¹

- Wenn $r_{k-1} = 1$ ist, dann liefern (18.3.10a) und (18.3.10b), dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf dem Intervall $[t_{j_{k-1}}, t_{j_{k-1}+r_{k-1}}]$ gleich y_{k-1} ist.

Andererseits ist $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf diesem Intervall gleich $\tilde{s}_{j_{k-1}}$. Daher ist $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf diesem Intervall gleich $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](\tilde{s}_{j_{k-1}}) = y_{k-1}$. Also gilt

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf } [t_{j_{k-1}}, t_{j_{k-1}+r_{k-1}}]. \quad (18.3.57)$$

- Wenn $l_k = 1$ ist, dann liefern (18.3.10d) und (18.3.10e), dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf dem Intervall $[t_{j_k-l_k}, t_{j_k}]$ konstant gleich y_k ist. Andererseits ist $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf diesem Intervall gleich \tilde{s}_{j_k} . Daher ist $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf diesem Intervall gleich $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}](\tilde{s}_{j_k}) = y_k$. Also gilt

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf } [t_{j_k-l_k}, t_{j_k}]. \quad (18.3.58)$$

¹Der Fall, dass es kein solches k gibt, wird nicht gesondert behandelt.

- Aus (18.3.10b) – (18.3.10d) folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $[t_{j_{k-1}+r_{k-1}}, t_{j_k-l_k}]$ affin ist, wobei

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{k-1}+r_{k-1}}) = y_{k-1}, \quad \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k-l_k}) = y_k. \quad (18.3.59)$$

Auf dem Rändern von $[\tilde{s}_{j_{k-1}}, \tilde{s}_{j_k}]$ nimmt $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}]$ die gleichen Werte an. Da $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ den Intervall $[t_{j_{k-1}+r_{k-1}}, t_{j_k-l_k}]$ linear und monoton steigend auf $[\tilde{s}_{j_{k-1}}, \tilde{s}_{j_k}]$ abbildet, folgt, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ auf $[t_{j_{k-1}+r_{k-1}}, t_{j_k-l_k}]$ affin ist, und auf dem Rändern mit $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ übereinstimmt. Daher stimmen $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}$ und $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ auf $[t_{j_{k-1}+r_{k-1}}, t_{j_k-l_k}]$ überein.

Insgesamt erhält man, dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf } [t_{j_{k-1}}, t_{j_k}]. \quad (18.3.60)$$

Insgesamt erhält man, dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_{\mathbf{U}}] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}} \text{ auf }]t_{j_{m_i-1}}, t_{j_{m_i}}[. \quad (18.3.61)$$

Dies war noch zu zeigen. □

18.4. Durch Hysterese-Operatoren generierte Funktionen auf Quintupel-Strings

Analog zu Def. 9.1.1 wird definiert:

18.4.1 Definition. Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Operator mit $\text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X) \subseteq D(\mathcal{H})$ gegeben.

- a) Die von \mathcal{H} auf $S^{b,3,b}(X)$ generierte Funktion $\text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)}\langle\mathcal{H}\rangle : S^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ ist definiert durch

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)}\langle\mathcal{H}\rangle(\mathbf{U}) := \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]](T), \quad \forall \mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X). \quad (18.4.1)$$

- b) Die von \mathcal{H} auf $S_F^{b,3,b}(X)$ generierte Funktion $\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)}\langle\mathcal{H}\rangle : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ ist die Einschränkung von $\text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)}\langle\mathcal{H}\rangle$ von $S_F^{b,3,b}(X)$.

Der Satz 9.1.3 geht über in:

18.4.2 Satz. Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit $\text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X) \subseteq D(\mathcal{H})$.

Für alle $\mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X)$ gilt

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)}\langle\mathcal{H}\rangle(\mathbf{U}) = \text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)}\langle\mathcal{H}\rangle(\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U})) = \text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)}\langle\mathcal{H}\rangle(\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U})), \quad (18.4.2)$$

d.h. $\text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)}\langle\mathcal{H}\rangle$ ist die kanonische CTC-Erweiterung von $\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)}\langle\mathcal{H}\rangle$.

Beweis. Es sei $\mathbf{U} \in S^{b,3,b}(X)$ beliebig. Dann liefert das Lemma 18.3.6, dass es eine stückweise lineare zulässige Zeittransformation $\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}} : [0, T] \rightarrow [0, T]$ gibt, so dass

$$\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U})] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}. \quad (18.4.3)$$

Die Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H} liefert nun, dass

$$\begin{aligned} \text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle (\mathbf{U}) &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]](T) \\ &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U})] \circ \text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}](T) \\ &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U})]](\text{redutrans}_{\mathbf{U}}^{\text{CTC}}(T)) \\ &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U})]](T) = \text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle ((\text{redu}^{\text{CTC}}(\mathbf{U}))). \end{aligned} \quad (18.4.4)$$

□

18.4.3 Lemma. *Es sei $\mathcal{H} : D(H)(\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit $\text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X) \subseteq D(H)$. Dann sind $\text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle$ und $\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle$ invariant bezüglich der Wiederholung von Tripelmitteln.*

Beweis. Es seien $\mathbf{U} = (V_0, \dots, V_n) \in S^{b,3,b}(X)$ und $\mathbf{W} := (W_0, \dots, W_{n+1}) \in S^{b,3,b}(X)$, gegeben, so dass \mathbf{W} aus \mathbf{U} durch Wiederholung von Tripelmitteln erzeugt wird. Betrachtet man Def. 17.3.17, dann sieht man, dass es eine stückweise lineare zulässige Zeittransformation $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ gibt, so dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}] = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] \circ \alpha$ ist. Dann liefert die Ratenunabhängigkeit von \mathcal{H} , dass

$$\begin{aligned} \text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle (\mathbf{W}) &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}]](T) = \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] \circ \alpha](T) \\ &= \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]](\alpha(T)) = \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]](T) = \text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle (\mathbf{U}). \end{aligned} \quad (18.4.5)$$

□

18.4.4 Lemma. *Es sei $\mathcal{H} : D(\mathcal{H})(\subseteq \text{Map}([0, T], X)) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ ein Hysterese-Operator mit $\text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X) \subseteq D(\mathcal{H})$.*

Es seien $u \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ und eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich von u gegeben.

Es sei \mathbf{U} wie im Lemma 18.3.5 gegeben. Dann gilt

$$\mathcal{H}[u](T) = \text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle (\mathbf{U}). \quad (18.4.6)$$

Beweis. Es sei α_u wie im Lemma 18.3.5. Dann liefert die Ratenunabhängigkeit von u , dass

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[u](T) &= \mathcal{H}[u](\alpha(T)) = \mathcal{H}[u \circ \alpha](T) = \mathcal{H}[u \circ \alpha](T) = \mathcal{H}[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]] \\ &= \text{Gen}_{S^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle (\mathbf{U}). \end{aligned} \quad (18.4.7)$$

□

Das Lemma 9.1.7 überträgt sich zu

18.4.5 Lemma. *Es seien zwei Hysterese-Operatoren $\mathcal{G}, \mathcal{H} : \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben.*

Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

a)

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}. \quad (18.4.8)$$

b) *Für die nach Def. 18.4.1 definierten Funktionen $\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{G} \rangle, \text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ gilt*

$$\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{G} \rangle = \text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle. \quad (18.4.9)$$

Beweis. **a) \implies b)** Klar.

b) \implies a) Mit dem Lemma 18.4.4 und dem Satz 18.4.2 folgt aus der Gültigkeit von (18.4.9), dass $\mathcal{H}[u](T) = \mathcal{G}[u](T)$ für alle $u \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ gilt. Da $D(\mathcal{G}) = D(\mathcal{H}) = \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ für grundlegende Transformationen invariant ist, liefert nun das Lemma 1.4.2, dass $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ ist .

□

18.4.6 Bemerkung. a) Es sei eine nichtleere Menge Z gegeben. Analog dazu, wie man für einem Hysterese-Operatoren mit Anfangszustand in Z , dessen Definitionsbereich die Menge $Z \times C_{\text{pw.af.}}([0, T]; X)$ enthält, eine Funktion auf $Z \times S_F(X)$ generieren kann, kann man eine Funktion auf $Z \times S_F^{b,3,b}(X)$ generieren, wenn der Definitionsbereich die Menge $Z \times \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ enthält.

b) Ebenso wie im Abschnitt 9 könnte man in den obigen Betrachtungen X jeweils durch eine konvexe, nichtleere Teilmenge X_1 von X ersetzen.

Teil VII.

**Im Intervallinneren stückweise
monotaffine und stetige Funktionen
und das Darstellungsergebnis für
Hysterese-Operatoren mit derartigen
Input-Funktionen**

19. Stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Funktionen und der Zusammenhang mit Quintupel-Strings

19.1. Im Intervallinneren monotaffine Funktionen

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest, und es sei X ein topologischer Vektorraum. Es sei eine Funktion $u : [0, T] \rightarrow X$ gegeben.

19.1.1 Definition. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben.

- a) Man sagt, dass u in Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist genau dann, wenn $u(t_a+)$ und $u(t_b-)$ wohldefiniert sind, und es eine monoton steigende Funktion $\beta :]t_a, t_b[\rightarrow [0, 1]$ mit $\lim_{t \searrow t_a} \beta(t) = 0$, $\lim_{t \nearrow t_b} \beta(t) = 1$ gibt,¹ so dass

$$u(t) = (1 - \beta(t))u(t_a+) + \beta(t)u(t_b-), \quad \forall t \in]t_a, t_b[. \quad (19.1.1)$$

- b) Man sagt, dass u in Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin und stetig ist, wenn u in Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist und u auf dem offenen Intervall $]t_a, t_b[$ stetig ist

19.1.2 Lemma. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben. Weiterhin seien $u_a, u_b \in X$ und eine Funktion $\beta :]t_a, t_b[\rightarrow [0, 1]$ gegeben, so dass

$$u(t) = (1 - \beta(t))u_a + \beta(t)u_b \quad \forall t \in]t_a, t_b[. \quad (19.1.2)$$

- a) Wenn β monoton steigend ist, dann ist u monotaffin im Inneren von $[t_a, t_b]$.
- b) Wenn β monoton steigend und stetig ist, dann ist u monotaffin und stetig im Inneren von $[t_a, t_b]$.

Beweis. Es sei vorausgesetzt, dass β monoton steigend ist. Dies liefert, dass $\beta(t_a+)$ und $\beta(t_b-)$ existieren, und mit (19.1.2) folgt, dass

$$u(t_a+) = (1 - \beta(t_a+))u_a + \beta(t_a+)u_b, \quad u(t_b-) = (1 - \beta(t_b-))u_a + \beta(t_b-)u_b. \quad (19.1.3)$$

¹Die Grenzwertbedingungen an β in der Definition sind die übertragene Version der Bedingungen $\beta(0) = 0$ und $\beta(1) = 1$ in der Definition 10.1.1 der Monotaffinität.

19. Stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Fkt. und Quintupel-Strings

- Wenn $\beta(t_a+) = \beta(t_b-)$ ist, dann liefert dies wegen der Monotonie von β , dass β auf $]t_a, t_b[$ konstant ist. Damit ist, nach (19.1.2), auch u auf $]t_a, t_b[$ konstant. Daher ist u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin und stetig.
- Wenn $\beta(t_a+) \neq \beta(t_b-)$ ist, dann ergibt sich, da β auf $]t_a, t_b[$ monoton steigend ist, dass $\beta(t_a+) < \beta(t_b-)$ ist. Wegen der Monotonie von β gibt es eine monoton steigende Funktion $\lambda :]t_a, t_b[\rightarrow [0, 1]$, so dass

$$\beta(t) = (1 - \lambda(t))\beta(t_a+) + \lambda(t)\beta(t_b-), \quad \forall t \in]t_a, t_b[. \quad (19.1.4)$$

Dann folgt, dass $\lambda(t_a+) = 0$, $\lambda(t_b-) = 1$ und (19.1.1) mit λ anstelle von β erfüllt ist. Dies zeigt, dass u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist.

Wenn β zusätzlich noch stetig ist, folgt sofort, dass u auf dem offenen Intervall $]t_a, t_b[$ stetig ist, und u somit im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin und stetig ist. \square

19.1.3 Bemerkung. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben.

- Wenn u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist, dann ist u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin.
- Wenn u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin und stetig ist, dann ist u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin und stetig.
- Wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ affin ist, dann ist u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin und stetig.
- Wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist, dann ist u auf $[t_a, t_b]$ von beschränkter Variation.

19.1.4 Lemma. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben, Es gilt genau dann, dass u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist, wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist und

$$u(t_a+), u(t_b-) \in \text{conv}(u(t_a), u(t_b)), \quad u(t_a+) \in \text{conv}(u(t_a), u(t_b-)). \quad (19.1.5)$$

Beweis. • Der “ \implies ” Teil der Aussage folgt unmittelbar aus der Definition der Monotaffinität auf $[t_a, t_b]$.

- Um den “ \impliedby ” Teil der Aussage zu zeigen, betrachten wir den Fall, dass u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist und (19.1.5) gilt. Dann gibt es eine monoton steigende Funktion $\beta :]t_a, t_b[\rightarrow [0, 1]$ mit $\lim_{t \searrow t_a} \beta(t) = 0$ und $\lim_{t \nearrow t_b} \beta(t) = 1$, so dass (19.1.1) gilt. Weiterhin gibt es $\lambda_a, \lambda_b, \gamma_a \in [0, 1]$, so dass

$$u(t_a+) = (1 - \lambda_a)u(t_a) + \lambda_a u(t_b), \quad u(t_b-) = (1 - \lambda_b)u(t_a) + \lambda_b u(t_b), \quad (19.1.6)$$

$$u(t_a+) = (1 - \gamma_a)u(t_a) + \gamma_a u(t_b-). \quad (19.1.7)$$

- Wenn $u(t_a+) = u(t_b-)$, dann gilt für alle $t \in]t_a, t_b[$, dass $u(t) = u(t_a+)$. Somit gilt für $\alpha : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t = t_a, \\ \lambda_a, & \text{wenn } t \in]t_a, t_b[, \\ 1, & \text{wenn } t = t_b, \end{cases} \quad (19.1.8)$$

dass

$$u(t) = (1 - \alpha(t))u(t_a) + \alpha(t)u(t_b), \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (19.1.9)$$

Dies liefert, dass u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist.

- Wenn $u(t_a+) \neq u(t_b-)$, dann ergibt sich aus (19.1.5), dass $u(t_a) \neq u(t_b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_a)u(t_a) + \lambda_a u(t_b) &= u(t_a+) = (1 - \gamma_a)u(t_a) + \gamma_a u(t_b-) \\ &= (1 - \gamma_a)u(t_a) + \gamma_a ((1 - \lambda_b)u(t_a) + \lambda_b u(t_b)) \\ &= (1 - \gamma_a \lambda_b)u(t_a) + \gamma_a \lambda_b u(t_b). \end{aligned} \quad (19.1.10)$$

Somit folgt, dass $\lambda_a = \gamma_a \lambda_b \leq \lambda_b$ ist. Daher ist $\alpha : [t_a, t_b] \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t = t_a, \\ \lambda_a + \beta(t)(\lambda_b - \lambda_a), & \text{wenn } t \in]t_a, t_b[, \\ 1, & \text{wenn } t = t_b, \end{cases} \quad (19.1.11)$$

eine monoton steigende Funktion mit $\alpha(t_a) = 0$ und $\alpha(t_b) = 1$. Es gilt für alle $t \in]t_a, t_b[$:

$$\begin{aligned} &(1 - \alpha(t))u(t_a) + \alpha(t)u(t_b) \\ &= (1 - \lambda_a - \beta(t)(\lambda_b - \lambda_a))u(t_a) + (\lambda_a + \beta(t)(\lambda_b - \lambda_a))u(t_b) \\ &= u(t_a+) + \beta(t)(u(t_b-) - u(t_a+)) = u(t). \end{aligned} \quad (19.1.12)$$

Da außerdem noch

$$u(t_a) = (1 - \alpha(t_a))u(t_a) + \alpha(t_a)u(t_b), \quad u(t_b) = (1 - \alpha(t_b))u(t_a) + \alpha(t_b)u(t_b), \quad (19.1.13)$$

und $\alpha(t_a) = 0$ und $\alpha(t_b) = 1$ ist, sieht man, dass u auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist. \square

19.1.5 Lemma. *Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben.*

a) *Wenn u in Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist, dann gilt für jede Funktion $v : [0, T] \rightarrow X$ mit*

$$v(t_a) = u(t_a+), \quad v(t_b) = u(t_b-), \quad v(t) = u(t), \quad \forall t \in]t_a, t_b[, \quad (19.1.14)$$

dass v auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist.

- b) Wenn $u(t_a+)$ und $u(t_b-)$ wohldefiniert sind, und es eine Funktion $v : [0, T] \rightarrow X$ gibt, so dass (19.1.14) gilt, und v auf $[t_a, t_b]$ monotaffin ist, dann folgt, dass u in Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist.

Beweis. a) Definiert man $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ durch

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t = t_a, \\ \beta(t), & \text{wenn } t \in]t_a, t_b[, \\ 1, & \text{wenn } t = t_b, \end{cases} \quad (19.1.15)$$

dann ist α monoton steigend, $\alpha(t_a) = 0$, $\alpha(t_b) = 1$ und es gilt

$$v(t) = (1 - \alpha(t))v(t_a) + \alpha(t)v(t_b), \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (19.1.16)$$

Daraus folgt, dass v monotaffin ist.

- b) Aus der Voraussetzung folgt, dass es eine monoton steigende Funktion $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, 1]$ mit $\alpha(t_a) = 0$ und $\alpha(t_b) = 1$, so dass (19.1.16) gilt. Mit dem Lemma 19.1.2 folgt dann, dass u im Inneren von $]t_a, t_b[$ monotaffin ist. □

19.1.6 Lemma. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben, so dass u nicht konstant auf $]t_a, t_b[$ ist. Dann gilt:

- a) Wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist, dann gibt eine eindeutig definierte monoton steigende Funktion $\beta :]t_a, t_b[\rightarrow]0, 1[$ mit (19.1.1).
- b) Wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin und stetig ist, dann ist die in a) definierte Funktion stetig.

Beweis. Es sei vorausgesetzt, dass u monotaffin ist. Sei β wie in Def. 19.1.1. Dann hat β die in a) beschriebenen Eigenschaften. Da u auf $]t_a, t_b[$ nicht konstant ist, folgt aus (19.1.1), dass $u(t_a+) \neq u(t_b-)$. Somit ist β durch (19.1.1) eindeutig bestimmt, und (19.1.1) zeigt dann auch, dass u auf $]t_a, t_b[$ genau dann stetig ist, wenn dies für β gilt. □

19.1.7 Definition. Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben, so dass u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin ist. Dann ist die *Parametrisierung* $\text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u] :]t_a, t_b[\rightarrow [0, 1]$ von u im Inneren von $[t_a, t_b]$ definiert durch

- Wenn u auf $]t_a, t_b[$ nicht konstant ist, dann ist $\text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u] := \beta$ mit β wie im Lem. 19.1.6.
- Wenn u auf $]t_a, t_b[$ konstant ist, dann ist $\text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u](t) := \frac{t-t_a}{t_b-t_a}$, für alle $t \in]t_a, t_b[$.

Analog zu Lemma 10.1.7 gilt:

19.1.8 Lemma. *Es seien $t_a, t_b \in [0, T]$ mit $t_a < t_b$ gegeben, so dass u in Inneren $]t_a, t_b[$ monotaffin ist.*

a) *Die Parametrisierung $\text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u] :]t_a, t_b[\rightarrow [0, 1]$ ist monoton steigend, und es gilt $\text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u](t_a+) = 0$, $\text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u](t_b+) = 1$ und*

$$u(t) = (1 - \text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u](t))u(t_a+) + \text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u](t)u(t_b-), \quad \forall t \in]t_a, t_b[. \quad (19.1.17)$$

b) *Wenn X ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_X$ ist, dann gilt für alle $t \in]t_a, t_b[$*

$$\text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u](t) \|u(t_b-) - u(t_a+)\|_X = \|u(t) - u(t_a+)\|_X. \quad (19.1.18)$$

c) *Wenn X ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_X$ ist, und $u(t_a+) \neq u(t_b-)$ ist, dann gilt für alle $t \in]t_a, t_b[$*

$$\text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u](t) = \frac{\|u(t) - u(t_a+)\|_X}{\|u(t_b-) - u(t_a+)\|_X}. \quad (19.1.19)$$

d) *u ist in Inneren von $]t_a, t_b[$ genau dann stetig, wenn $\text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u]$ auf $]t_a, t_b[$ stetig ist.*

Beweis. a) Folgt unmittelbar aus der Definition.

b) Aus (19.1.1) folgt für alle $t \in]t_a, t_b[$, dass

$$u(t) - u(t_a+) = \text{Para}_{]t_a, t_b[}^{\text{int}}[u](t)(u(t_b-) - u(t_a+)). \quad (19.1.20)$$

Dies liefert (19.1.18).

c) Aus (19.1.18) folgt (19.1.19) unmittelbar.

d) Folgt mit dem Lem. 19.1.6. unmittelbar aus der Definition. □

Das Lemma 10.1.10 geht über in:

19.1.9 Lemma. *Es seien $t_a, t_b, t_c \in [0, T]$ mit $t_a < t_b < t_c$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) *u ist im Inneren von $]t_a, t_c[$ monotaffin und stetig.*

ii) *u ist im Inneren von $]t_a, t_b[$ und von $]t_b, t_c[$ monotaffin und stetig und es gilt*

$$u(t_b-) = u(t_b+) = u(t_b) \in \text{conv}(u(t_a+), u(t_c-)). \quad (19.1.21)$$

Beweis. **i) \implies ii):** Wenn u in Inneren auf $]t_a, t_c[$ monotaffin und stetig ist, dann folgen die Aussagen in ii) durch Anwendung von (19.1.1).

ii) \implies i): Es sei ii) erfüllt.

Es sei $v : [0, T] \rightarrow X$ definiert durch

$$v(t) = \begin{cases} u(t_a+), & \text{wenn } t \leq t_a, \\ u(t), & \text{wenn } t \in]t_a, t_c[, \\ u(t_c-), & \text{wenn } t \geq t_c. \end{cases} \quad (19.1.22)$$

Dann liefert die Voraussetzung und das Lemma 19.1.5, dass v auf $[t_a, t_b]$ und auf $[t_b, t_c]$ monotaffin ist, und dass $v(t_b) \in \text{conv}(v(t_a), v(t_c))$. Dann liefert das Lemma 10.1.9, dass v auf $[t_a, t_c]$ monotaffin ist. Mit dem Lemma 19.1.5 ergibt sich, dass u im Inneren $[t_a, t_c]$ monotaffin ist. \square

Das folgende Korollar ist zur Vereinfachung der Formulierung von Beweisen hilfreich:

19.1.10 Korollar. *Es seien $t_a, t_b, t_c \in [0, T]$ mit $t_a < t_b < t_c$ gegeben. Es sei vorausgesetzt, dass*

$$u(t_b-) = u(t_b+) = u(t_b). \quad (19.1.23)$$

- a) *Wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ konstant ist und u im Inneren von $[t_b, t_c]$ monotaffin und stetig ist, dann ist u im Inneren von $[t_a, t_c]$ monotaffin und stetig.*
- b) *Wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin und stetig ist und u im Inneren von $[t_b, t_c]$ konstant ist, dann ist u im Inneren von $[t_a, t_c]$ monotaffin und stetig.*

Beweis. Wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ oder im Inneren von $[t_b, t_c]$ konstant ist, dann folgt mit (19.1.23), dass (19.1.21) gilt. Dank des Lemmas 19.1.9 sieht man nun die Gültigkeit der obigen Aussagen. \square

Analog zum Korollar 10.1.11 ergibt sich

19.1.11 Korollar. *Es seien $t_a, t_b, t_c, t_d \in [0, T]$ mit $t_a < t_b < t_c < t_d$ gegeben, so dass $u(t_b) \neq u(t_c)$ ist, u im Inneren von $[t_a, t_c]$ und im Inneren von $[t_b, t_d]$ monotaffin und stetig ist. Dann folgt, dass u im Inneren von $[t_a, t_d]$ monotaffin und stetig ist.*

Beweis. Dank der Voraussetzungen liefert das Lemma 19.1.5, dass $v : [0, T] \rightarrow X$ mit

$$v(t) = \begin{cases} u(t_a+), & \text{wenn } t \leq t_a, \\ u(t), & \text{wenn } t \in]t_a, t_d[, \\ u(t_d-), & \text{wenn } t \geq t_d, \end{cases} \quad (19.1.24)$$

auf $[t_a, t_c]$ und auf $[t_b, t_d]$ monotaffin ist, und dass $v(t_b) \neq v(t_c)$ ist. Mit dem Korollar 10.1.11 erhält man nun, dass v auf $[t_a, t_d]$ monotaffin ist. Mit dem Lemma 19.1.5 erhält man nun, dass u im Inneren von $[t_a, t_d]$ monotaffin ist. Die Stetigkeit im Inneren von $[t_a, t_d]$ ergibt sich aus den Stetigkeiten im Inneren von $[t_a, t_c]$ und $[t_b, t_d]$. \square

Analog zu Korollar 10.1.12 ergibt sich:

19.1.12 Korollar. Es seien $t_a, t_b, t_c, t_d \in [0, T]$ mit $t_a < t_b < t_c \leq t_d$ gegeben, so dass

$$u(t_b-) = u(t_b) = u(t_b+) \notin \text{conv}(u(t_a+), u(t_d-)). \quad (19.1.25)$$

- a) Wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ und von $[t_b, t_d]$ monotaffin und stetig ist, und $u(t_b) \neq u(t_c)$ ist, dann folgt, dass u auf $[t_a, t_c]$ nicht monotaffin ist.
- b) Wenn u im Inneren von $[t_a, t_b]$ monotaffin und stetig ist, und u im Inneren von $[t_b, t_c]$ affin ist, dann folgt, dass u im Inneren von $[t_a, t_c]$ nicht monotaffin ist.

Beweis. a) Die Voraussetzungen an u liefern dann, dass u im Inneren von $[t_a, t_d]$ stetig ist.

Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass u im Inneren von $[t_a, t_c]$ monotaffin ist. Somit ist u im Inneren von $[t_a, t_c]$ und von $[t_b, t_d]$ monotaffin und stetig. Da $u(t_b) \neq u(t_c)$ ist, liefert das Kor. 19.1.11, dass u im Inneren $[t_a, t_d]$ monotaffin und stetig ist. Nach dem Lemma 19.1.9 muss dann $u(t_b) \in \text{conv}(u(t_a+), u(t_d-))$ sein. Dies ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen an u .

- b) Da u im Inneren von $[t_b, t_d]$ affin ist, und $u(t_b+) = u(t_b) \neq u(t_d-)$ ist, folgt dass $u(t_b) \neq u(t_c)$ ist. Mit a) folgt nun, dass u im Inneren auf $[t_a, t_c]$ nicht monotaffin ist. \square

19.2. Stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Funktionen

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest, und es sei X ein topologischer Vektorraum.

19.2.1 Definition. Es sei $u \in \text{Map}([0, T], X)$ gegeben. Wenn es $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt: u ist monotaffin und stetig im Inneren von $[t_{i-1}, t_i]$, dann gilt:

- a) Man sagt, dass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine *Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung* von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u ist.
- b) Man sagt, dass u *stückweise monotaffin und stetig in den Intervallinneren* ist.

19.2.2 Definition. Es bezeichnet $\text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ die Menge der Funktionen $u : [0, T] \rightarrow X$ die stückweise monotaffin und stetig in den Intervallinneren sind.

19.2.3 Bemerkung. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Wenn es eine Monotaffinitäts-Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u gibt, bei der für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass u auf $]t_{i-1}, t_i[$ stetig ist, dann gilt:

- a) u ist stückweise monotaffin und stetig in den Intervallinneren, d.h. es gilt $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$.
- b) Es ist $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ auch eine Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u .

c) Weiterhin gilt dann für alle $i = 1, \dots, n$:

$$u(t_{i-1}+), u(t_i-) \in \text{conv}(u(t_{i-1}), u(t_i)), \quad u(t_{i-1}+) \in \text{conv}(u(t_{i-1}), u(t_i-)). \quad (19.2.1)$$

19.2.4 Bemerkung. Es sei $u \in C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X)$ gegeben. Dann ist jede Monotaffinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u auch eine Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u .

19.2.5 Bemerkung. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.int.}}([0, T]; X)$ gegeben, und es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .

- a) Dann ist u genau dann eine stückweise monotaffine Funktion, wenn (19.2.1) für alle $i = 1, \dots, n$ gilt.
- b) Dann ist jede Verfeinerung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = T$ von $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ wieder eine Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich u .
- c) Es ist $u \in BV([0, T], X)$.

19.2.6 Definition. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ gegeben. Man sagt, dass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine *Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung* von $[0, T]$ für u , ist, wenn für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, dass

$$t_i = \max\{s \in]t_{i-1}, T] \mid u \text{ ist monotaffin und stetig im Inneren von } [t_i, s]\}. \quad (19.2.2)$$

Analog zum Lemma 10.2.8 gilt

19.2.7 Lemma. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ gegeben. Wenn es eine *Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung* von $[0, T]$ für u gibt, dann ist diese eindeutig bestimmt.

Beweis. Der Beweis des Lemma 10.2.8 überträgt sich unmittelbar. □

19.2.8 Lemma. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine *Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung* von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u . Wenn man $s_0 = 0$, $i = 0$, und $m_0 = 0$ setzt, und dann die Setzungen

$$i := i + 1,$$

$$m_i := \max\left\{k \in \{m_{i-1} + 1, \dots, n\} \mid u \text{ ist in Inneren von } [s_{i-1}, t_k] \text{ monotaffin und stetig}\right\}, \quad (19.2.3)$$

$$s_i := \begin{cases} T, & \text{wenn } m_i = n, \\ t_{m_i}, & \text{wenn } u(t_{m_i}-) \neq u(t_{m_i}), \\ \sup\{t \in [t_{m_i}, t_{m_i+1}] \mid u(\tau) = u(t_{m_i}-), \quad \forall \tau \in [t_{m_i}, t]\}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (19.2.4)$$

wiederholt, bis $m_i = n$ ist, und dann $i_* := i$ setzt, dann ist $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{i_*} = T$ die eindeutig definierte *Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung* von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u , und es ist gilt $s_j \in [t_{m_j}, t_{m_j+1}[$ für alle $j = 1, \dots, m_i - 1$.

Beweis. Es sei $j \in \{1, \dots, m_i\}$. Dann liefert die Definition vom m_j , dass u im Inneren von $[s_{j-1}, t_{m_j}]$ monotaffin und stetig ist.

- Wenn $s_j = t_{m_j}$, dann folgt, dass u im Inneren von $[s_{j-1}, s_j]$ monotaffin und stetig ist.
- Wenn $s_j > t_{m_j}$, dann ist u auf $[t_{m_j}, s_j[$ konstant gleich $u(t_{m_j}-)$. Es ist $u(t_{m_j}-) = u(t_{m_j}) = u(t_{m_j}+)$ und u ist Inneren von $[s_{j-1}, t_{m_j}]$ monotaffin und stetig. Das Korollar 19.1.10 liefert nun, dass u im Inneren von $[s_{j-1}, s_j]$ monotaffin und stetig ist.

Somit ist gezeigt, dass u im Inneren von $[s_{j-1}, s_j]$ monotaffin und stetig ist.

- Wenn $T = s_j$ ist, dann folgt, dass $j = m_{i^*}$ und dass

$$s_j = \max\{s \in]s_{j-1}, T] \mid u \text{ ist monotaffin und stetig in Inneren von } [s_{j-1}, s]\}. \quad (19.2.5)$$

- Wenn $u(t_{m_j}-) \neq u(t_{m_j})$ ist, dann ist u bei $t_{m_j} = s_j$ nicht stetig. Dies liefert, dass (19.2.5) gilt.
- Wenn $T > s_j$ und $u(t_{m_j}-) = u(t_{m_j})$ ist, dann ist $t_{m_j+1} > s_j$, weil u in Inneren von $[s_{j-1}, s_j]$ monotaffin und stetig ist, aber u im Inneren von $[s_{j-1}, t_{m_j+1}]$ nicht monotaffin und stetig ist.

Nach Konstruktion gilt für all $t \in]s_j, t_{m_j+1}]$, dass es ein $\tau \in]s_j, t]$ gibt, so dass $u(\tau) \neq u(t_{m_j})$ ist. Wenn u im Inneren von $[s_{j-1}, t]$ monotaffin und stetig wäre, dann wäre u nach dem Lemma 19.1.9 auch im Inneren von $[s_{j-1}, \tau]$ monotaffin und stetig. Da u im Inneren von $[t_{m_j}, t_{m_j+1}]$ monotaffin und stetig ist, liefert das Lemma 19.1.11, dass dann u auch auf $[s_{j-1}, t_{m_j+1}]$ monotaffin und stetig sein müsste, was ein Widerspruch zur Konstruktion wäre.

Somit gilt (19.2.5).

Dies zeigt, dass $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{m_i} = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ für u ist. \square

19.2.9 Lemma. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ für u .

Es sei $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ eine zulässige Zeittransformation von $[0, T]$.

Es seien $\sigma_{0,\min} \leq \sigma_{0,\max} < \sigma_{1,\min} \leq \sigma_{1,\max} < \dots < \sigma_{n,\min} \leq \sigma_{n,\max}$ definiert durch

$$\sigma_{i,\min} := \min\{s \in [0, T] \mid \alpha(s) = t_i\}, \quad \sigma_{i,\max} := \max\{s \in [0, T] \mid \alpha(s) = t_i\}, \quad (19.2.6)$$

für alle $i = 0, \dots, n$.

Es seien $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_n$ und $0 =: s_0 < s_1 < \dots < s_{k_n} = T$ definiert durch:

- i) • Wenn $\sigma_{0,\max} > 0$ ist und $u(0) \neq u(0+)$, dann sei

$$k_0 := 1, \quad s_0 := 0, \quad s_1 := \sigma_{0,\max}. \quad (19.2.7)$$

- Andernfalls sei

$$k_0 := 0, \quad s_0 := 0. \quad (19.2.8)$$

ii) Für $i = 1, \dots, n-1$ gilt:

- Wenn $\sigma_{i,\min} = \sigma_{i,\max}$ ist, dann sei

$$k_i := k_{i-1} + 1, \quad s_{k_i} := \sigma_{i,\max}. \quad (19.2.9)$$

- Wenn $u(t_i-) = u(t_i)$, dann sei (19.2.9) gültig.
- Andernfalls:

– Wenn $u(t_i) = u(t_i+)$, dann sei

$$k_i := k_{i-1} + 1, \quad s_{k_i} := \sigma_{i,\min}. \quad (19.2.10)$$

– Wenn $u(t_i) \neq u(t_i+)$, dann sei

$$k_i := k_{i-1} + 2, \quad s_{k_{i-1}} := \sigma_{i,\min}, \quad s_{k_i} := \sigma_{i,\max}. \quad (19.2.11)$$

iii) • Wenn $\sigma_{n,\min} < T$ und $u(T-) \neq u(T)$ ist, dann sei

$$k_n := k_{n-1} + 2, \quad s_{k_{n-1}} = \sigma_{n,\min}, \quad s_{k_n} := T. \quad (19.2.12)$$

- Andernfalls sei

$$k_n := k_{n-1} + 1, \quad s_{k_n} := T. \quad (19.2.13)$$

Dann ist $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k_n} = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ für $u \circ \alpha$.

Beweis. i) • Wenn $\sigma_{0,\max} > 0$ ist und $u(0) \neq u(0+)$, dann gilt für die entsprechend definierten k_0 , s_0 und s_1 , dass $u \circ \alpha$ im Inneren von $[s_0, s_1]$ konstant ist, und bei s_1 nicht stetig ist. Also ist

$$s_1 = \max\{t \in]s_0, T] \mid u \text{ ist im Inneren von } [s_0, t] \text{ monotaffin und stetig}\}. \quad (19.2.14)$$

- Andernfalls ist $k_0 = 0$ und es gilt $s_0 = \sigma_{0,\min} = 0$. Wenn $0 = s_0 < \sigma_{0,\max} = 0$, dann wird dieser Teil der Fallunterscheidung nur aktiv, wenn $u(t_0) = u(0) = u(0+) = u(t_0+)$ ist.

ii) Es wird jetzt per Induktion über j bewiesen, dass für alle $j = 0, \dots, n-1$ die folgende Aussage gilt:

$$s_\ell = \max\{t \in]s_{\ell-1}, T[\mid u \text{ ist im Inneren von } [s_{\ell-1}, t] \text{ monotaffin und stetig}\}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ mit } \ell \leq k_j, \quad (19.2.15a)$$

$$s_{k_j} < \sigma_{j,\max} \Rightarrow (s_{k_j} = \sigma_{j,\min} \text{ und } u(t_j) = u(t_j+)). \quad (19.2.15b)$$

Ind.Beg.: Die Argumentation in i) liefert, dass (19.2.15) für $j = 0$ gilt.

Ind.Sch.: Es sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gegeben, so dass (19.2.15) für $j = i-1$ gilt. Da u in Inneren von $[t_{i-1}, t_i]$ monotaffin und stetig ist, und α den offenen Intervall $] \sigma_{i-1, \max}, \sigma_{i, \min} [$ stetig und monoton auf den offenen Intervall $] t_{i-1}, t_i [$ abbildet, folgt, dass $u \circ \alpha$ im Inneren von $[\sigma_{i-1, \max}, \sigma_{i, \min}]$ monotaffin und stetig ist. Es gilt $s_{k_{i-1}} \leq \sigma_{i-1, \max}$.

- Wenn $s_{k_{i-1}} = \sigma_{i-1, \max}$, dann ist $u \circ \alpha$ im Inneren von $[s_{k_{i-1}}, \sigma_{i, \min}]$ monotaffin und stetig.
- Wenn $s_{k_{i-1}} < \sigma_{i-1, \max}$ ist, dann liefert (19.2.15b) für $j = i-1$, dass $s_{k_{i-1}} = \sigma_{i-1, \min}$ und dass $u(t_{i-1}) = u(t_{i-1}+)$. Da α auf $[s_{k_{i-1}}, \sigma_{i-1, \max}]$ gleich t_{i-1} ist, ergibt sich, dass $u \circ \alpha$ im Inneren von $[s_{k_{i-1}}, \sigma_{i-1, \max}]$ konstant ist, und dass

$$u \circ \alpha(\sigma_{i-1, \max}-) = u \circ \alpha(\sigma_{i-1, \max}) = u \circ \alpha(\sigma_{i-1, \max}+). \quad (19.2.16)$$

Das Korollar 19.1.10 liefert nun, dass $u \circ \alpha$ im Inneren von $[s_{k_{i-1}}, \sigma_{i, \min}]$ monotaffin und stetig ist.

Es ist somit bewiesen, dass $u \circ \alpha$ im Inneren von $[s_{k_{i-1}}, \sigma_{i, \min}]$ monotaffin und stetig ist.

Es gilt für alle $s > \sigma_{i, \max}$, dass u im Inneren von $[t_{i-1}, \alpha(s)] = [\alpha(s_{k_{i-1}}), \alpha(s)]$ nicht monotaffin und stetig ist. Da α monoton und stetig ist, folgt daher, dass $u \circ \alpha$ im Inneren von $[s_{k_{i-1}}, s]$ nicht monotaffin und stetig ist.

- Wenn $\sigma_{i, \min} = \sigma_{i, \max}$ ist, dann ist, nach (19.2.9), $k_i := k_{i-1} + 1$ und $s_{k_i} := \sigma_{i, \max}$. Die obigen Überlegungen liefern, dass

$$s_{k_i} = \max \{ t \in]s_{k_{i-1}}, T] \mid u \text{ ist im Inneren von } [s_{k_{i-1}}, t] \text{ monotaffin und stetig} \}. \quad (19.2.17)$$

Da (19.2.15a) für $j = i-1$ gilt, sieht man nun, dass die Aussage auch für $j = i$ gilt. Die Implikation (19.2.15b) gilt für $j = i$, da die Voraussetzung der Implikation für $j = i$ nicht erfüllt ist. Dies liefert, dass (19.2.15) für $j = i$ gilt.

- Wenn $\sigma_{i, \min} < \sigma_{i, \max}$ und $u(t_{i-1}-) = u(t_i)$ ist, dann gilt (19.2.9) und damit $k_i := k_{i-1} + 1$ und $s_{k_i} := \sigma_{i, \max}$. Nutzt man noch aus, dass α auf dem Intervall $[\sigma_{i, \min}, \sigma_{i, \max}]$ konstant gleich t_i ist, und dass $u(t_{i-1}-) = u(t_i)$, dann folgt, dass $u \circ \alpha$ auf dem Intervall $[\sigma_{i, \min}, \sigma_{i, \max}]$ konstant ist, und dass

$$u \circ \alpha(\sigma_{i, \min}-) = u \circ \alpha(\sigma_{i, \min}) = u \circ \alpha(\sigma_{i, \min}+). \quad (19.2.18)$$

Da $u \circ \alpha$ auf $[s_{k_{i-1}}, \sigma_{i, \min}]$ monotaffin und stetig ist, ergibt sich durch Anwendung des Korollars 19.1.10, dass $u \circ \alpha$ auf $[s_{k_{i-1}}, \sigma_{i, \max}] = [s_{k_{i-1}}, s_{k_i}]$ monotaffin und stetig ist. Zusammen mit den obigen Betrachtungen erkennt man, dass (19.2.17) gilt. Da (19.2.15a) für $j = i-1$ gilt, folgt, dass die Aussage auch für $j = i$ erfüllt ist. Wieder gilt die Implikation (19.2.15b) gilt für $j = i$, da die Voraussetzung der Implikation für $j = i$ nicht erfüllt ist. Dies liefert, dass (19.2.15) für $j = i$ gilt.

- Andernfalls gilt $\sigma_{i,\min} < \sigma_{i,\max}$ und $u(t_i-) \neq u(t_i)$. Dies liefert, dass $u \circ \alpha$ bei $\sigma_{i,\min}$ unstetig ist. Da, wie oben ausgeführt, $u \circ \alpha$ im Inneren von $[s_{k_{i-1}}, \sigma_{i,\min}]$ monotaffin und stetig ist, folgt dass

$$\sigma_{i,\min} = \max\{t \in]s_{k_{i-1}}, T] \mid u \text{ ist im Inneren von } [s_{k_{i-1}}, T] \text{ monotaffin und stetig}\}. \quad (19.2.19)$$

- Wenn $u(t_i) = u(t_i+)$, dann folgt aus (19.2.10), dass $k_i := k_{i-1} + 1$ und $s_{k_i} := \sigma_{i,\min}$. Dann liefert (19.2.19), dass (19.2.17) gilt. Da (19.2.15a) für $j = i - 1$ gilt, folgt die Gültigkeit der Aussage für $j = i$. Weiterhin gelten in der Implikation (19.2.15b) für $j = i$ sowohl die Voraussetzung als auch die Aussagen in der Folgerung. Also ist (19.2.15) für $j = i$ erfüllt.
- Wenn $u(t_i) \neq u(t_i+)$, dann ist, nach (19.2.11), $k_i := k_{i-1} + 2$, $s_{k_{i-1}} := \sigma_{i,\min}$ und $s_{k_i} := \sigma_{i,\max}$. Mit (19.2.19) erhält man, dass

$$s_{k_{i-1}} = \max\{t \in]s_{k_{i-1}}, T] \mid u \text{ ist im Inneren von } [s_{k_{i-1}}, t] \text{ monotaffin und stetig}\}. \quad (19.2.20)$$

Da $u(t_i) \neq u(t_i+)$ gilt, ergibt sich, dass $u \circ \alpha$ somit bei $s_{k_i} := \sigma_{i,\max}$ unstetig ist. Da $u \circ \alpha$ auf $[s_{k_{i-1}}, s_{k_i}] = [\sigma_{i,\min}, \sigma_{i,\max}]$ konstant ist, folgt dass

$$s_{k_i} = \max\{t \in]s_{k_{i-1}}, T] \mid u \text{ ist im Inneren von } [s_{k_{i-1}}, t] \text{ monotaffin und stetig}\}. \quad (19.2.21)$$

Kombiniert man jetzt (19.2.15a) für $j = i - 1$ mit (19.2.20) und (19.2.21), dann folgt, dass (19.2.15a) für $j = i$ gilt.

Wieder gilt die Implikation (19.2.15b) gilt für $j = i$, da die Voraussetzung der Implikation für $j = i$ nicht erfüllt ist. Also gilt (19.2.15) für $j = i$.

Diese Induktion liefert, dass die Aussage (19.2.15) für $j = n - 1$ gilt.

- iii) Da die Implikation in (19.2.15b) für $j = n - 1$ gilt, kann man wie am Anfang des Induktionsschrittes in ii) argumentieren, und erhält, dass $u \circ \alpha$ im Inneren von $[s_{k_{n-1}}, \sigma_{n,\min}]$ monotaffin und stetig ist.

- Wenn $\sigma_{n,\min} < T$ und $u(T-) \neq u(T)$ ist, dann gilt, nach (19.2.12), dass $k_n := k_{n-1} + 2$, $s_{k_{n-1}} = \sigma_{n,\min}$ und $s_{k_n} := T$. Da $u(T-) \neq u(T)$ ist, folgt dass $u \circ \alpha$ bei $\sigma_{n,\min}$ unstetig ist. Also gilt

$$s_{k_{n-1}} = \max\{t \in]s_{k_{n-1}}, T] \mid u \text{ ist im Inneren von } [s_{k_{n-1}}, t] \text{ monotaffin und stetig}\}. \quad (19.2.22)$$

Da $u \circ \alpha$ auf $[s_{k_{n-1}}, s_{k_n}]$ konstant und $s_{k_n} = T$ ist, folgt dass

$$s_{k_n} = \max\{t \in]s_{k_{n-1}}, T] \mid u \text{ ist im Inneren von } [s_{k_{n-1}}, t] \text{ monotaffin und stetig}\}. \quad (19.2.23)$$

Also gilt (19.2.15a) auch für $j = n$.

- Andernfalls folgt aus (19.2.13), dass $k_n := k_{n-1} + 1$ und $s_{k_n} := T$.
 - Wenn $\sigma_{n,\min} = T$ ist, dann ist u auf $[s_{k_{n-1}}, T]$ monotaffin und stetig. Daher gilt

$$s_{k_n} = \max\{t \in]s_{k_{n-1}}, T] \mid u \text{ ist im Inneren von } [s_{k_{n-1}}, t] \text{ monotaffin und stetig}\}. \quad (19.2.24)$$

- Wenn $\sigma_{n,\min} < T$ ist, dann ist $u(T-) = u(T)$. Da α auf $\sigma_{n,\min}$ konstant ist, folgt, dass

$$u \circ \alpha(\sigma_{n,\min} -) = u \circ \alpha(\sigma_{n,\min}) = u \circ \alpha(\sigma_{n,\min} +) \quad (19.2.25)$$

und dass $u \circ \alpha$ auf $[\sigma_{n,\min}, T]$ konstant ist. Mit dem Korollar 19.1.10 folgt nun, dass u im Inneren von $[s_{k_{n-1}}, T]$ monotaffin und stetig ist. Also gilt (19.2.24)

Kombiniert man (19.2.15a) für $j = n - 1$ mit (19.2.24), dann erhält man, dass (19.2.15a) für $j = n$ gilt.

Da (19.2.15a) für $j = n$ gilt, ist bewiesen, dass $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k_n} = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ für $u \circ \alpha$ ist. \square

19.3. Verbindung zwischen stückweise im Intervallinneren monotaffinen und stetigen Funktionen und Quintupel-Strings

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest und es sei X ein topologischer Vektorraum. Es sei $B = \{0, 1\}$.

19.3.1 Lemma. *Für*

$$\mathbf{U} = ((l_0, (x_0, y_0, z_0), r_0)), \dots, (l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n)) \in S^{b,3,b}(X)$$

und $t_i := \frac{i}{m}T$ für alle $i = 0, \dots, m := n + \sum_{i=1}^n (r_{i-1} + l_i)$ gilt:

- Es ist $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ nicht nur eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{V}]$, sondern auch eine Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung.*
- Wenn $\mathbf{U} \in S_F^{b,3,b}(X)$ liegt, und man $j_0 = 0$ und $j_k := k + \sum_{i=1}^k (r_{i-1} + l_i)$ setzt, dann ist $0 = t_{j_0} < t_{j_1} < \dots < t_{j_n} = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{V}]$.*

Beweis. a) Da nach Bemerkung 18.3.4 $0 = t_0 < \dots < t_m = T$ eine verallgemeinerte Affinitäts-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{V}]$ ist, folgt für alle $i = 1, \dots, n$, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{V}]$ im Inneren von $[t_{i-1}, t_i]$ affin ist, und somit im Inneren des Intervalls auch monotaffin und stetig ist.

- b) Die Definition von j_0, \dots, j_n stimmt mit der entsprechenden in Def. 18.3.2 überein. Die Darstellung von $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ in (18.3.10) liefert für alle $k = 1, \dots, n$, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ in Inneren von $[t_{j_{k-1}}, t_{j_k}]$ monotaffin und stetig ist, und dass für $k < n$ noch gilt, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ in Inneren von $[t_{j_k}, t_{j_{k+1}}]$ affin ist.

Somit gilt für alle $k = 1, \dots, n$

$$t_{j_k} \leq \max\{s \in]t_{j_{k-1}}, T] \mid \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] \text{ ist monotaffin und stetig im Inneren von } [t_{j_k}, s]\}. \quad (19.3.1)$$

Für $k = n$ ist $t_{j_k} = T$, so dass die Gleichheit unmittelbar folgt. Betrachtet man $k \in \{1, \dots, n-1\}$, dann ist

$$((l_{k-1}, (x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}), r_{k-1}), (l_k, (x_k, y_k, z_k), r_k), (l_{k+1}, (x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}), r_{k+1}))$$

kein CTC-Tripel. Somit gilt

$$x_k = y_k = z_k \in \text{conv}(z_{k-1}, x_{k+1}) \quad \textbf{nicht}. \quad (19.3.2)$$

Nutzt man wieder die Darstellung von $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ in (18.3.10), so sieht man, dass

$$\begin{aligned} \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k} -) &= \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k}) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k} +) \\ &\in \text{conv}(\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{k-1}}), \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_{k+1}})) \quad \textbf{nicht gilt}. \end{aligned} \quad (19.3.3)$$

Dann liefert das Lemma 19.1.9, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ nicht im Inneren von $[t_{j_{k-1}}, t_{j_{k+1}}]$ monoton und stetig ist.

- Wenn $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k} -) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k}) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k} +)$ nicht gilt, dann liefert die Darstellung von $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ in (18.3.10), dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ bei t_{j_k} nicht stetig ist, und somit

$$\begin{aligned} t_{j_k} &= \max\{s \in]t_{j_{k-1}}, T] \mid \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}] \text{ ist monotaffin und} \\ &\quad \text{und stetig im Inneren von } [t_{j_k}, s]\} \end{aligned} \quad (19.3.4)$$

gilt.

- Wenn $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k} -) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k}) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}](t_{j_k} +)$ gilt, und man ausnutzt, dass für alle $t \in]t_{j_k}, t_{j_{k+1}}]$ gilt, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ im Inneren von $[t_{j_k}, t]$ affin ist, erhält man mit Kor. 19.1.12, dass $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ im Inneren von $[t_{j_{k-1}}, t]$ nicht monotaffin ist. Also gilt die obige Gleichung.

Damit ist beweisen, dass $0 = t_{j_0} < t_{j_1} < \dots < t_{j_n} = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{V}]$ ist. □

19.3.2 Lemma. *Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u .*

i) Es seien $r_0, \dots, r_n \in \{0, 1\}$ definiert durch $r_n = 1$ und

$$r_i := \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t_i+) = u(t_{i+1}-), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i) = u(t_i+), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i+) \in u(]t_i, t_{i+1}[), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (19.3.5)$$

für alle $i = 0, \dots, n-1$.

ii) Es seien $l_0, \dots, l_n \in \{0, 1\}$ definiert durch $l_0 = 1$ und

$$l_i := \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t_{i-1}+) = u(t_i-), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i-) = u(t_i), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i-) \in u(]t_{i-1}, t_i[), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (19.3.6)$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

iii) Es sei

$$\mathbf{U} := ((l_i, (u(t_i-)), u(t_i), u(t_i+)), r_i)_{i=0}^n. \quad (19.3.7)$$

a) Dann liegt \mathbf{U} in $S^{b,3,b}(X)$.

b) Wenn $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u ist, dann liegt \mathbf{U} in $S_F^{b,3,b}(X)$.

Beweis. a) Die Definition der r_i und der l_i liefert zusammen den Festlegungen $u(t_0-) = u(t_0)$ und $u(t_n+) = u(T+) = u(T) = u(t_n)$, dass \mathbf{U} ein Element der in Def. 17.3.1 definierten Menge $S^{b,3,b}(X)$ ist.

b) Es sei vorausgesetzt, dass $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u ist.

Um mit einem Widerspruchsbeweis zu zeigen, dass \mathbf{U} ein CTC-Tripel-freier Quintupel-String ist, nehmen wir das Gegenteil an. Also nehmen wir dann, dass $j \in \{1, \dots, n-1\}$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} & ((l_{j-1}, (u(t_{j-1}-), u(t_{j-1}), u(t_{j-1}+)), r_{j-1}), (l_j, (u(t_j-), u(t_j), u(t_j+)), r_j), \\ & (l_{j-1}, (u(t_{j-1}-), u(t_{j-1}), u(t_{j-1}+)), r_{j+1})) \end{aligned}$$

ein CTC-Tripel ist.

Dann gilt

$$u(t_j-) = u(t_j) = u(t_j+) \in \text{conv}(u(t_{j-1}+), u(t_{j+1})). \quad (19.3.8)$$

Da u im Inneren von $[t_{j-1}, t_j]$ und von $[t_j, t_{j+1}]$ monotaffin und stetig ist, folgt nun mit dem Lemma 19.1.9, dass u im Inneren von $[t_{j-1}, t_{j+1}]$ monotaffin und stetig ist. Dies ist ein Widerspruch zur Definition der Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u .

□

19.3.3 Definition. Der *Auswertungsoperator*

$$\rho_{S_F^{b,3,b}(X),T} : \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0,T];X) \rightarrow S_F^{b,3,b}(X) \quad (19.3.9)$$

bildet $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0,T];X)$ auf \mathbf{U} wie im Lemma 19.3.2b) ab, d.h. auf \mathbf{U} wie in (19.3.7), wobei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0,T]$ bezüglich der Funktion u ist.

19.3.4 Lemma. *Es gilt*

$$\rho_{S_F^{b,3,b}(X),T}(\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]) = \mathbf{U}, \quad \forall \mathbf{U} \in S_F^{b,3,b}(X). \quad (19.3.10)$$

Beweis. Es sei

$$((l'_0, (x_0, y_0, z_0), r'_0), \dots, (l'_n, (x_n, y_n, z_n), r'_n)) := \mathbf{U}, \quad (19.3.11)$$

$j_0 = 0$, $j_k := k + \sum_{i=1}^k (r'_{i-1} + l'_i)$ für alle $k = 1, \dots, n$ und $t_i := \frac{i}{j_n}T$ für alle $i = 0, \dots, j_n$. Nach dem Lemma 19.3.1 ist dann $0 = t_{j_0} < t_{j_1} < \dots < t_{j_n} = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0,T]$ bezüglich der Funktion $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$.

Es seien r_0, \dots, r_n und l_0, \dots, l_n in $\{0,1\}$ und

$$\mathbf{W} = ((l_k, (u(t_{j_k}-), u(t_{j_k}), u(t_{j_k}+)), r_k))_{k=0}^n$$

wie im Lemma 19.3.2 für $u := \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ mit dieser Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0,T]$.

Nutzt man (18.3.10), dann sieht man, dass für alle $k = 1, \dots, n$ gilt:

$$u(t_{j_{k-1}}) = y_{k-1}, \quad u(t_{j_{k-1}}+) = z_{k-1} = u(t_{j_{k-1}+r_{k-1}}+), \quad (19.3.12)$$

$$u(t_{j_k}-) = x_k = u(t_{j_k-l_k}-), \quad u(t_{j_k}) = y_k. \quad (19.3.13)$$

- Wenn $r'_{k-1} = 1$ ist, dann folgt aus (18.3.10), dass u auf $]t_{j_{k-1}}, t_{j_{k-1}+1}]$ gleich z_{k-1} ist. Also ist $u(t_{j_{k-1}}+) = z_{k-1} \in u([t_{j_{k-1}}, t_{j_k}[)$. Somit ist $r_{k-1} = 1 = r'_{k-1}$.
- Wenn $r'_{k-1} = 0$ ist, dann liefert die Tatsache, dass $\mathbf{U} \in S_F^{b,3,b}(X)$ liegt, dass $z_{k-1} \neq x_k$ und $y_{k-1} \neq z_{k-1}$ ist. Aus (18.3.10) folgt, dass $u(t_{j_{k-1}}+) = z_{k-1}$ ist, und im u Inneren von $[t_{j_{k-1}}, t_{j_k-l_k}]$ die affine Funktion ist, die links den Grenzwert z_{k-1} hat und rechts x_k .
 - Wenn $l_k = 1$ ist, dann ist u auf $[t_{j_k-l_k}, t_{j_k}[$ gleich $x_k \neq z_{k-1}$. Also gilt, dass $u(t_{j_{k-1}}+) = z_{k-1} \notin u([t_{j_{k-1}}, t_{j_k-l_k}[)$ und $u(t_{j_k}-) = x_k$. Da außerdem $u(t_{j_{k-1}}) = y_{k-1} \neq z_{k-1} = u(t_{j_{k-1}}+)$ ist, folgt dass $r'_{k-1} = 0 = r_{k-1}$ ist.
- Wenn $l'_k = 1$ ist, dann folgt aus (18.3.10), dass u auf $[t_{j_{k-1}}, t_{j_k}[$ gleich x_k ist. Also ist $u(t_{j_k}-) = x_k \in u([t_{j_{k-1}}, t_{j_k}[)$. Somit ist $l_k = 1 = l'_k$.
- Wenn $l'_k = 0$ ist, dann liefert die Tatsache, dass $\mathbf{U} \in S_F^{b,3,b}(X)$ liegt, dass $z_{k-1} \neq x_k$ und $x_k \neq y_k$ ist. Aus (18.3.10) folgt, dass $u(t_{j_k}-) = x_k$ ist, und u im Inneren von $[t_{j_{k-1}+r_{k-1}}, t_{j_k}]$ die affine Funktion ist, die links den Grenzwert z_{k-1} hat und rechts x_k .

19.3. Verbindung zwischen Funktionen und Quintupel-Strings

– Wenn $r_{k-1} = 1$ ist, dann ist u auf $[t_{j_{k-1}}, t_{j_{k-1}+1}[$ gleich $z_{k-1} \neq x_k$

Also gilt, dass $u(t_{j_k}-) = x_k \notin u([t_{j_{k-1}}, t_{j_k-l_k}[)$ und $u(t_{j_{k+1}}+) = z_{k-1}$. Da außerdem $u(t_{j_k}-) = x_k \neq y_k = u(t_{j_k})$ ist, folgt dass $l'_k = 0 = l_k$ ist.

Da die Definition von $S^{b,3,b}(X)$ und die Setzungen in Lemma 19.3.2 liefern, dass $r_n = 1 = r'_n$, $l_0 = 1 = l'_0$, $u(t_0-) = u(t_0) = y_0 = x_0$ und $u(t_n+) = u(t_n) = y_n = z_n$, erkennt man, dass $\mathbf{U} = \mathbf{W}$ bewiesen ist. \square

19.3.5 Lemma. *Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u . Es seien $r_0, \dots, r_n \in \{0, 1\}$, $l_0, \dots, l_n \in \{0, 1\}$ und \mathbf{U} definiert wie im Lemma 19.3.2.*

Für alle $k = 1, \dots, n$ sei $m_k := k + 1 + \sum_{i=1}^k (r_{i-1} + l_i)$. Weiterhin sei $m_0 := 0$. Es seien $s_i := \frac{i}{m_n}$ für alle $i = 0, \dots, m$.

Sei jetzt $k \in \{1, \dots, n\}$ beliebig.

Es sei $\text{Para}_{[t_{k-1}, t_k]}^{\text{int}}[u] :]t_{k-1}, t_k[\rightarrow [0, 1]$ die in Def. 19.1.7 definierte die Parametrisierung von u im Inneren von $[t_{k-1}, t_k]$.

a) Die Setzungen

$$\sigma_{k-1} := \begin{cases} t_{k-1}, & \text{wenn } r_{k-1} = 0, \\ \max\{s \in [t_{k-1}, t_k] \mid \text{Para}_{[t_{k-1}, t_k]}^{\text{int}}[u](s) = 0\}, & \text{wenn } r_{k-1} = 1, \end{cases} \quad (19.3.14)$$

$$\tau_k := \begin{cases} t_k, & \text{wenn } l_k = 0, \\ \min\{s \in [t_{k-1}, t_k] \mid \text{Para}_{[t_{k-1}, t_k]}^{\text{int}}[u](s) = 1\}, & \text{wenn } l_k = 1, \end{cases} \quad (19.3.15)$$

liefern wohldefinierte Zahlen mit $t_{k-1} \leq \sigma_{k-1} < \tau_k \leq t_k$, und es gilt:

- Wenn $r_{k-1} = 1$ ist, dann ist $t_{k-1} < \sigma_{k-1}$.
- Wenn $s_k = 1$ ist, dann ist $\tau_k < t_k$.

b) • Wenn $r_{k-1} = 1$ ist, dann sei $\zeta_{u,k}$ auf $[t_{k-1}, \sigma_{k-1}]$ die lineare Funktion mit

$$\zeta_{u,k}(t_{k-1}) = s_{m_{k-1}}, \quad \zeta_{u,k}(\sigma_{k-1}) = s_{m_{k-1}+1}. \quad (19.3.16)$$

- Wenn $l_k = 1$ ist, dann sei $\zeta_{u,k}$ auf $[\tau_k, t_k]$ die lineare Funktion mit

$$\zeta_{u,k}(\tau_k) = s_{m_k-1}, \quad \zeta_{u,k}(t_k) = s_{m_k}. \quad (19.3.17)$$

- Es sei

$$\zeta_{u,k}(t) := \left(1 - \text{Para}_{[t_{k-1}, t_k]}^{\text{int}}[u](t)\right) \theta_{k-1}^- + \text{Para}_{[t_{k-1}, t_k]}^{\text{int}}[u](t) \theta_k^+, \quad \forall t \in [\sigma_{k-1}, \tau_k], \quad (19.3.18)$$

$$\text{mit } \theta_{k-1}^- := s_{m_{k-1}+r_{k-1}}, \quad \theta_k^+ := s_{m_k-l_k}. \quad (19.3.19)$$

Dies liefert eine wohldefinierte Funktion $\zeta_{u,k} : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow [s_{m_{k-1}}, s_k]$. Diese ist stetig und monoton steigend. Es gilt $\zeta_{u,k}(t_{k-1}) = s_{m_{k-1}}$, $\zeta_{u,k}(t_k) = s_{m_k}$ und es ist

$$u(t) = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{W}_n] \circ \zeta_{u,k}(t), \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k]. \quad (19.3.20)$$

Beweis. Folgt, teilweise in einer ähnlichen Argumentation wie im Beweis von Lemma 18.3.5, durch Anwendung von (18.3.10), und der Eigenschaften der Parametrisierung, die im Lemma 19.1.8 beschrieben werden. \square

19.3.6 Definition. Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ gegeben. Dann ist die *Parametrisierung*

$$\text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}^{\text{int}}[u] : [0, T] \rightarrow [0, T]$$

von u folgendermassen definiert.

Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u . Es seien $\zeta_{u,1}, \dots, \zeta_{u,k}$ wie im Lemma 19.3.5. Dann gilt

$$\text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}^{\text{int}}[u](t) := \zeta_{u,k}(t), \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, \dots, n. \quad (19.3.21)$$

Es gilt dann der folgende Satz:

19.3.7 Satz. *Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ gegeben. Dann ist die Parametrisierung $\text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}^{\text{int}}[u] : [0, T] \rightarrow [0, T]$ von u eine zulässige Zeittransformation, und für das Resultat $\rho_{\text{S}_F^{\text{b},3,\text{b}}(X),T}(u)$ der Anwendung des Auswertungsoperators auf u gilt dann*

$$u = \pi_{\text{pw.af.int.}}[\rho_{\text{S}_F^{\text{b},3,\text{b}}(X),T}(u)] \circ \text{Para}_{[0, T] \rightarrow [0, T]}^{\text{int}}[u]. \quad (19.3.22)$$

Beweis. Folgt durch Kombination von Lemma 19.3.2, Def. 19.3.3, Lemma 19.3.5, und Def. 19.3.6. \square

20. Hysterese-Operatoren für stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Input-Funktionen und ihre Erzeugung mit Hilfe von Funktionen auf CTC-Tripel-freien Strings

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest. Es sei X ein topologischer Vektorraum und es sei Y eine nichtleere Menge. Es sei $B = \{0, 1\}$.

20.1. Der Gedächtnis-Operator für stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Funktionen

20.1.1 Bemerkung. Betrachtet man für $T^* \in]0, T]$ das Kapitel 19.3 mit der Endzeit T ersetzt durch T^* , so liefert die Definition 19.3.3 einen Auswertungsoperator $\rho_{S_F^{b,3,b}(X), T^*} : \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T^*]; X) \rightarrow S_F^{b,3,b}(X)$.

In Analogie zum Gedächtnis-Operator in Def.11.1.1 erfolgt jetzt, nach den Vorbereitungen im Kapitel 19.3, die folgende Definition:

20.1.2 Definition. a) Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$. Dann ist $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u] : [0, T] \rightarrow S_F^{b,3,b}(X)$ definiert durch

$$\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](t) = \begin{cases} ((1, (u(0), u(0), u(0)), 1), (1, (u(0), u(0), u(0)), 1)), & \text{wenn } t = 0, \\ \rho_{S_F^{b,3,b}(X), t}(u|_{[0, t]}), & \text{wenn } t \in]0, T]. \end{cases} \quad (20.1.1)$$

b) Der *Gedächtnis-Operator* auf $\text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ ist die Abbildung

$$\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}} : \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], S_F^{b,3,b}(X)),$$

die $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ auf die in a) definierte Funktion

$$\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u] \in \text{Map}([0, T], S_F^{b,3,b}(X))$$

abbildet.

20.1.3 Lemma. *Es sei $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$.*

Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u .

i) *Es seien $r_{u,0}, \dots, r_{u,n} \in \{0, 1\}$ definiert durch $r_{u,n} := 1$ und*

$$r_{u,i} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t_i+) = u(t_{i+1}-), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i) = u(t_i+), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i+) \in u([t_i, t_{i+1}[), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (20.1.2)$$

für alle $i = 0, \dots, n-1$.

ii) *Es seien $l_{u,0}, \dots, l_{u,n} \in \{0, 1\}$ definiert durch $l_{u,0} := 1$ und*

$$l_{u,i} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t_{i-1}+) = u(t_i-), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i) = u(t_i-), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i-) \in u([t_{i-1}, t_i]), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (20.1.3)$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

Mit diesen Setzungen sind die folgenden Aussagen gültig:

$$\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](0) = ((1, (u(0), u(0), u(0)), 1), (1, (u(0), u(0), u(0)), 1)), \quad (20.1.4)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](t) \\ &= \text{concat}_{X^3} \left(((l_{u,i}, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i+)), r_{u,i}))_{i=0}^{m-1}, (1, (u(t), u(t), u(t)), 1) \right) \\ & \quad \forall t \in]t_{m-1}, t_m[, m = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (20.1.5)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](t_m) \\ &= \text{concat}_{X^3} \left(((l_{u,i}, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i+)), r_{u,i}))_{i=0}^{m-1}, (l_{u,m}, (u(t_m-), u(t_m), u(t_m)), 1) \right) \\ & \quad \forall m = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (20.1.6)$$

Beweis.

Aus (20.1.1) für $t = 0$ folgt die Gültigkeit von (20.1.4).

Es sei $m \in \{1, \dots, n\}$ und $T^* \in]t_{m-1}, t_m]$ beliebig.

Setzt man $t'_k = t_k$ für alle $k = 0, \dots, m-1$ und $t'_m = T^*$, so ist $0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_m = T^*$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T^*]$ bezüglich der Funktion $u|_{[0, T^*]}$.

Betrachtet man das Kapitel 19.3 mit der Endzeit T ersetzt durch T^* , und dass Lemma 19.3.2 mit u ersetzt durch $u|_{[0, T^*]}$, so erhält man $r_0, \dots, r_m \in \{0, 1\}$, $l_0, l_1, \dots, l_m \in \{0, 1\}$ und $\mathbf{U} \in S_F^{b,3,b}$. Nach (19.3.7), Def. 19.3.3 und Def. 20.1.2 gilt

$$\mathbf{U} = \left(\left(l_i, (u|_{[0, T^*]}(t_i-), u|_{[0, T^*]}(t_i), u|_{[0, T^*]}(t_i+)), r_i \right) \right)_{i=0}^m, \quad (20.1.7)$$

$$\mathbf{U} = \rho_{S_F^{b,3,b}(X), T^*} \left(u|_{[0, T^*]} \right) = \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](T^*). \quad (20.1.8)$$

Vergleicht man (19.3.5) und (20.1.2), dann sieht man, dass $r_k = r_{u,k}$ für alle $k = 0, \dots, m-1$ gilt. Ebenso liefern (19.3.6) und (20.1.3), dass $l_k = l_{u,k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $k < m$ gilt, und dass, da für alle $T' \in]t_{k-1}, t_k[$ gilt, dass u in T' stetig, und somit $u(T'-) = u(T')$ ist,

$$\begin{aligned} l_m &= \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t_{m-1}+) = u(T^*-), \\ 1, & \text{wenn } u(T^*-) = u(T^*), \\ 1, & \text{wenn } u(T^*-) \in u(]t_{m-1}, T^*]), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} l_{u,m}, & \text{wenn } T^* = t_m, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (20.1.9)$$

Aus (20.1.7) ergibt sich, dass

$$\mathbf{U} = \text{concat} \left(\left((l_i, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i+)), r_i) \right)_{i=0}^{m-1}, (l_m, (u(T^*-), u(T^*), u(T^*)), 1) \right). \quad (20.1.10)$$

- Wenn $T^* \in]t_{m-1}, t_m[$ ist, dann liefert (20.1.9), dass $l_m = 1$ ist, und somit nach (20.1.10) gilt, dass

$$\mathbf{U} = \text{concat} \left(\left((l_i, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i+)), r_i) \right)_{i=0}^{m-1}, (1, (u(T^*-), u(T^*), u(T^*)), 1) \right). \quad (20.1.11)$$

Mit (20.1.8) folgt somit, dass (20.1.5) gilt.

- Wenn $T^* = t_m$ ist, dann liefert (20.1.9), dass $l_m = l_{u,m}$ ist.

Aus (20.1.10) ergibt sich, dass

$$\mathbf{U} = \text{concat} \left(\left((l_i, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i+)), r_i) \right)_{i=0}^{m-1}, (l_{u,m}, (u(t_m-), u(t_m), u(t_m)), 1) \right). \quad (20.1.12)$$

Mit (20.1.8) folgt somit, dass (20.1.6) bewiesen ist.

□

20.1.4 Lemma. *Der Gedächtnis-Operator $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.} : \text{Map}_{pw.mo.af.co.in.}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], S_F^{b,3,b}(X))$ ist kausal.*

Beweis. Betrachtet man $u, v \in \text{Map}_{pw.mo.af.co.in.}([0, T]; X)$, so dass es ein $t \in [0, T]$ gibt, so dass $u(s) = v(s)$ für alle $s \in [0, t]$ gilt, dann folgt aus (20.1.1), dass

$$\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[u](0) = \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[v](0). \quad (20.1.13)$$

Wenn $t > 0$ ist, dann ist $u|_{[0,t]} = v|_{[0,t]}$ und somit

$$\rho_{S_F^{b,3,b}(X),t}(u|_{[0,t]}) = \rho_{S_F^{b,3,b}(X),t}(v|_{[0,t]}). \quad (20.1.14)$$

Daraus erhält man mit (20.1.1), dass

$$\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[u](t) = \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[v](t). \quad (20.1.15)$$

Dies zeigt, dass $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}$ kausal ist. □

20.1.5 Lemma. *Es seien $u \in \text{Map}_{pw.mo.af.co.in.}([0, T]; X)$ und eine zulässigen Zeittransformation $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ für u .*

Es seien $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_n$ und $0 =: s_0 < s_1 < \dots < s_{k_n} = T$ definiert wie im Lemma 19.2.9.

a) *Es gilt*

$$u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1}-) = u(t_i-), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (20.1.16)$$

b) *Es gilt*

$$u \circ \alpha(s_{k_i}+) = u(t_i+), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (20.1.17)$$

Beweis. Es seien $\sigma_{0,\min} \leq \sigma_{0,\max} < \sigma_{1,\min} \leq \sigma_{1,\max} < \dots < \sigma_{n,\min} \leq \sigma_{n,\max}$ definiert wie im Lemma 19.2.9.

Dann ist $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k_n} = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ für $u \circ \alpha$, und es gilt $s_\ell = t_0$ für alle $\ell = 0, \dots, k_0$ und $s_j = t_i$ für alle $j = k_{i-1} + 1, \dots, k_i$ und alle $i = 1, \dots, n$. Weiterhin gilt für alle $i = 0, \dots, n$:

$$\sigma_{i,\min} := \min\{s \in [0, T] \mid \alpha(s) = t_i\}, \quad \sigma_{i,\max} := \max\{s \in [0, T] \mid \alpha(s) = t_i\}. \quad (20.1.18)$$

a) Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig.

Nach (20.1.18) gilt (20.1.16) für i , wenn $s_{k_{i-1}+1} = \sigma_{i,\min}$ ist.

- Betrachtet man für $i \neq n$ im Lemma 19.2.9 die Setzungen in ii), dann sieht man, dass $s_{k_{i-1}+1} \neq \sigma_{i,\min}$ nur dann gilt, wenn $s_{k_{i-1}+1} = \sigma_{i,\max}$ und $u(t_i-) = u(t_i)$. In diesem Fall gilt dann (20.1.16) ebenfalls.

20.1. Der Gedächtnis-Operator für stückw. im Intervallinneren monotaffine u. stetige Fkt.

- Betrachtet man für $i = n$ im Lemma 19.2.9 die Setzungen in iii), dann sieht man, dass $s_{k_{n-1}+1} \neq \sigma_{n,\min}$ nur dann gilt, wenn $s_{k_{n-1}+1} = T = \sigma_{n,\max} = t_n$ und $u(T-) = u(T)$ ist. In diesem Fall folgt auch, dass (20.1.16) für $i = n$ gilt.

b) Es ist

$$u \circ \alpha(s_{k_n}+) = u \circ \alpha(T+) = u \circ \alpha(T) = u(T) = u(T+) = u(t_n+). \quad (20.1.19)$$

Also gilt die Gleichung für $i = n$.

Sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$ beliebig.

Mit (20.1.18) erkennt man, dass (20.1.17) für i gilt, wenn $s_{k_i} = \sigma_{i,\max}$ ist. Betrachtet man im Lemma 19.2.9 die Setzungen in ii), dann sieht man, dass $s_{k_i} \neq \sigma_{i,\max}$ nur dann gilt, wenn $s_{k_i} = \sigma_{i,\min}$ und $u(t_i) = u(t_i+)$. In diesem Fall folgt dann auch, dass (20.1.17) gültig ist.

□

20.1.6 Lemma. *Es seien die Voraussetzungen des Lemmas 20.1.5 erfüllt.*

Es seien $r_{u,0}, \dots, r_{u,n} \in \{0, 1\}$ und $l_{u,0}, \dots, l_{u,n} \in \{0, 1\}$ wie im Lemma 20.1.3.

Es seien $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_n$ und $0 =: s_0 < s_1 < \dots < s_{k_n} = T$ definiert wie im Lemma 19.2.9.

Es seien $r_{u \circ \alpha,0}, \dots, r_{u \circ \alpha,k_n} \in \{0, 1\}$ und $l_{u \circ \alpha,0}, \dots, l_{u \circ \alpha,k_n} \in \{0, 1\}$ wie im Lemma 20.1.3 mit u ersetzt durch $u \circ \alpha$.

a) Es gilt

$$r_{u,i} = r_{u \circ \alpha,k_i}, \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (20.1.20)$$

b) Es gilt

$$l_{u \circ \alpha,0} = l_{u,0}, \quad l_{u \circ \alpha,k_{i-1}+1} = l_{u,i}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (20.1.21)$$

c) Wenn $k_0 \neq 0$ ist, dann gilt

$$u(t_0) = u \circ \alpha(s_0) = u \circ \alpha(s_0+) = u \circ \alpha(s_1-) = u \circ \alpha(s_1), \quad (20.1.22)$$

$$k_0 = 1, \quad r_{u \circ \alpha,0} = 1, \quad l_{u \circ \alpha,1} = 1, \quad u \circ \alpha(s_1) \neq u \circ \alpha(s_1+). \quad (20.1.23)$$

d) Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $k_i \neq k_{i-1} + 1$ gilt:

$$u(t_i) = u \circ \alpha(s_{k_{i-1}}) = u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+}) = u \circ \alpha(s_{k_i}-) = u \circ \alpha(s_{k_i}), \quad (20.1.24)$$

$$k_i = k_{i-1} + 2, \quad r_{u \circ \alpha,k_{i-1}} = 1, \quad l_{u \circ \alpha,k_i} = 1. \quad u(t_i-) = u \circ \alpha(s_{k_{i-1}-}) \neq u \circ \alpha(s_{k_{i-1}}), \quad (20.1.25)$$

$$i < n \Rightarrow u \circ \alpha(s_{k_i}) \neq u \circ \alpha(s_{k_i}+) = u(t_i+). \quad (20.1.26)$$

e) Für alle $m = 1, \dots, n$ sei

$$\mathbf{U}_{u,m} := ((l_{u,i}, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i+)), r_{u,i}))_{i=0}^{m-1}, \quad (20.1.27)$$

$$\mathbf{U}_{u \circ \alpha,m} := ((l_{u \circ \alpha,i}, (u \circ \alpha(s_i-), u \circ \alpha(s_i), u \circ \alpha(s_i+)), r_{u \circ \alpha,i}))_{i=0}^{k_m-1}. \quad (20.1.28)$$

Dann gilt für alle $m = 1, \dots, n$ eine der folgenden Aussagen:

- Es ist $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m} = \mathbf{U}_{u, m}$ oder
- $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m}$ wird durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus $\mathbf{U}_{u, m}$ erzeugt.

Beweis. Betrachtet man das Lemma 20.1.3 mit u ersetzt durch $u \circ \alpha$, so erhält man:

i) Für alle $i = 0, \dots, k_n - 1$ gilt

$$r_{u \circ \alpha, i} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } u \circ \alpha(s_i +) = u \circ \alpha(s_{i+1} -), \\ 1, & \text{wenn } u \circ \alpha(s_i) = u \circ \alpha(s_{i+1}), \\ 1, & \text{wenn } u \circ \alpha(s_i +) \in u \circ \alpha(]s_i, s_{i+1}[), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20.1.29)$$

ii) Für alle $i = 1, \dots, k_n$ gilt

$$l_{u \circ \alpha, i} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } u \circ \alpha(s_{i-1} +) = u \circ \alpha(s_i -), \\ 1, & \text{wenn } u \circ \alpha(s_i) = u \circ \alpha(s_i -), \\ 1, & \text{wenn } u \circ \alpha(s_i -) \in u \circ \alpha(]s_{i-1}, s_i[), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20.1.30)$$

Kombiniert man (20.1.29), (20.1.30) (20.1.16) und (20.1.17), so erkennt man für alle $i = 0, \dots, n - 1$ und alle $j = 1, \dots, n$, dass

$$r_{u \circ \alpha, k_i} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t_i +) = u(t_{i+1} -), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i) = u(t_{i+1}), \\ 1, & \text{wenn } u \circ \alpha(s_{k_i} +) \in u \circ \alpha(]s_{k_i}, s_{k_i+1}[), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (20.1.31)$$

$$l_{u \circ \alpha, k_{j-1}+1} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t_{j-1} +) = u(t_j -), \\ 1, & \text{wenn } u(t_j) = u(t_j -), \\ 1, & \text{wenn } u \circ \alpha(s_{k_{j-1}+1} -) \in u \circ \alpha(]s_{k_{j-1}}, s_{k_{j-1}+1}[), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20.1.32)$$

Die Definition der $\sigma_{i, \max}$ und $\sigma_{i, \min}$, siehe auch (20.1.18), und die Definition der s_i im Lemma 19.2.9 liefert, dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$u(]t_{i-1}, t_i]) = u \circ \alpha(] \sigma_{i-1, \max}, \sigma_{i, \min}]) \subseteq u \circ \alpha(]s_{k_{i-1}}, s_{k_{i-1}+1}[), \quad (20.1.33)$$

$$u \circ \alpha(]s_{k_{i-1}}, \sigma_{i, \min}]) \subseteq u(]t_{i-1}, t_i]), \quad u \circ \alpha(] \sigma_{i-1, \max}, s_{k_{i-1}+1}[) \subseteq u(]t_{i-1}, t_i]). \quad (20.1.34)$$

Die Monotaffinität von $u \circ \alpha$ auf $[s_{k_{i-1}}, s_{k_{i-1}+1}]$ liefert dann für alle $i = 1, \dots, n$, dass

$$u \circ \alpha(s_{k_{i-1}} +) \in u \circ \alpha(]s_{k_{i-1}}, s_{k_{i-1}+1}[) \iff u \circ \alpha(s_{k_{i-1}} +) \in u \circ \alpha(]s_{k_{i-1}}, \sigma_{i, \min}]), \quad (20.1.35)$$

$$\begin{aligned} u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1} -) \in u \circ \alpha(]s_{k_{i-1}}, s_{k_{i-1}+1}[) &\iff \\ u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1} -) \in u \circ \alpha(] \sigma_{i-1, \max}, s_{k_{i-1}+1}[) &. \end{aligned} \quad (20.1.36)$$

- a) Es ist per Definition $r_{u,n} = 1 = r_{u \circ \alpha, k_n}$. Somit ist die Gleichung (20.1.20) für $i = n$ bewiesen.

Es sei $i \in \{0, \dots, n-1\}$ beliebig.

- Wenn $u(t_i+) \in u([t_i, t_{i+1}[)$:

Dann liefern (20.1.17) und (20.1.35), dass $u \circ \alpha(s_{k_i}+) \in u \circ \alpha([s_{k_i}, s_{k_{i+1}}[)$.

Aus (20.1.31) und (20.1.2) folgt dann, dass $r_{u \circ \alpha, k_i} = 1 = r_{u,i}$.

- Wenn $u(t_i+) \notin u([t_i, t_{i+1}[)$ und $r_{u,i} = 1$:

Dann ist eine der beiden oberen Bedingungen auf der rechten Seite von (20.1.2) erfüllt, und damit auch die entsprechende Bedingung auf der rechten Seite von (20.1.31). Also gilt $r_{u \circ \alpha, k_i} = 1 = r_{u,i}$.

- Wenn $u(t_i+) \notin u([t_i, t_{i+1}[)$ und $r_{u,i} = 0$:

Dann ist keine der beiden oberen Bedingungen auf der rechten Seite von (20.1.2) erfüllt, und damit auch keine der entsprechenden Bedingungen auf der rechten Seite von (20.1.31).

Nimmt man an, dass $r_{u \circ \alpha, k_i} = 1$, muss somit $u \circ \alpha(s_{k_i}+) \in u \circ \alpha([s_{k_i}, s_{k_{i+1}}[)$ erfüllt sein. Mit (20.1.35), (20.1.33), (20.1.17) und (20.1.34) folgt dann, dass $u(t_i+) = u \circ \alpha(s_{k_{i+1}}) = u(t_i)$ ist. Dies würde aber bedeuten, dass $r_{u,i} = 1$ ist. Also liegt ein Widerspruch vor. Also ist $r_{u \circ \alpha, k_i} \neq 1$, und es gilt somit $r_{u \circ \alpha, k_i} = 0 = r_{u,i}$.

- b) Per Definition ist $l_{u,0} = 1 = l_{u \circ \alpha, 0}$. Daher gilt die erste Gleichung in (20.1.21).

Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig.

- Wenn $u(t_i-) \in u([t_{i-1}, t_i])$:

Dann liefern (20.1.17) und (20.1.35), dass $u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1}-) \in u \circ \alpha([s_{k_{i-1}}, s_{k_{i-1}+1}])$.

Nach (20.1.32) und (20.1.3) ist somit $l_{u \circ \alpha, k_{i-1}+1} = 1 = l_{u,i}$.

- Wenn $u(t_i-) \in u([t_{i-1}, t_i])$ und $l_{u,i} = 1$:

Dann ist eine der oberen beiden Bedingungen erfüllt, die auf der rechten Seite von (20.1.3) stehen. Damit gilt auch auf der rechten Seite von (20.1.32) eine der beiden oberen Bedingungen. Also ist $l_{u \circ \alpha, k_{i-1}+1} = 1 = l_{u,i}$.

- Wenn $u(t_i-) \in u([t_{i-1}, t_i])$ und $l_{u,i} = 0$: Dann ist keine der oberen beiden Bedingungen erfüllt, die auf der rechten Seite von (20.1.3) stehen. Damit gilt auch auf der rechten Seite von (20.1.32) keine der beiden oberen Bedingungen.

Wenn man annimmt, dass $l_{u \circ \alpha, k_{i-1}+1} = 1$ ist, muss also $u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1}-) \in u \circ \alpha([s_{k_{i-1}}, s_{k_{i-1}+1}])$ gelten. Mit (20.1.36), (20.1.16) und (20.1.34) ergibt sich dann, dass $u(t_i-) = u(t_i)$ ist. Nach (20.1.3) müsste dann aber $l_{u,i} = 1$ sein, was ein Widerspruch ist. Somit gilt $l_{u \circ \alpha, k_{i-1}+1} = 0 = l_{u,i}$.

- c) Betrachtet man das Lemma 19.2.9, dann sieht man, dass der Fall $k_0 \neq 0$ nur eintreten kann, wenn $\sigma_{0,\max} > 0$ ist und $u(0) \neq u(0+)$. Dann gilt nach (19.2.7), dass $k_0 = 1$, $s_0 = 0$ und $s_1 = \sigma_{0,\max}$. Somit ist α auf $[0, \sigma_{0,\max}] = [s_0, s_1]$ konstant gleich $0 = t_0$, und daher gilt (20.1.22).

20. Hysteresis-Operatoren und ihre Erzeugung mit Fkt. auf CTC-Tripel-freien Strings

Mit (20.1.29) für $i = 0$ und (20.1.30) für $i = 1$ folgt dass $r_{u \circ \alpha, 0} = 1 = l_{u \circ \alpha, 1}$. Weiterhin ist $u \circ \alpha(s_1+) = u \circ \alpha(\sigma_{0, \max}+) = u(0+)$. Da $u \circ \alpha(s_1) = u(0) \neq u(0+)$ ist, sieht man, dass (20.1.23) erfüllt ist.

d) Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass $k_i \neq k_{i-1} + 1$ gilt:

Betrachtet man das Lemma 19.2.9, so sieht man, dass in diesem Fall $k_i = k_{i-1} + 2$ ist und dass

$$s_{k_i-1} = \sigma_{i, \min} < \sigma_{i, \max} = s_{k_i}, \quad u(t_i-) \neq u(t_i). \quad (20.1.37)$$

Es ist $u \circ \alpha$ auf $[s_{k_i-1}, s_{k_i}]$ konstant gleich $u(t_i)$. Dies liefert (20.1.24), und mit (20.1.29) und (20.1.30) ergibt sich, dass $r_{u \circ \alpha, k_i-1} = 1 = l_{u \circ \alpha, k_i}$.

Weiterhin gilt

$$u \circ \alpha(s_{k_i-1}-) = u \circ \alpha(\sigma_{i, \min}-) = u(t_i-) \neq u(t_i). \quad (20.1.38)$$

Somit ist (20.1.25) bewiesen.

Wenn $n > i$ ist, dann liefert das Lemma 19.2.9, dass $u(t_i) \neq u(t_i+)$ ist, und dass

$$u \circ \alpha(s_{k_i}+) = u \circ \alpha(\sigma_{i, \max}+) = u(t_i+). \quad (20.1.39)$$

Dies liefert die Gültigkeit von (20.1.26).

e) **Ind. Beg. für $m = 0$:** Nach Definition vor der Gleichung (20.1.3) im Lemma 20.1.3, ist $l_{u, 0} = 1$. Ersetzt man u durch $u \circ \alpha$, dann liefert diese Definition $l_{u \circ \alpha, 0} = 1$. Weiterhin gilt

$$u(t_0-) = u(t_0) = u \circ \alpha(s_0) = u \circ \alpha(s_0-). \quad (20.1.40)$$

Aus (20.1.20) erhält man, dass

$$u \circ \alpha(s_{k_0}+) = u(t_0+), \quad r_{u, 0} = r_{u \circ \alpha, k_0}. \quad (20.1.41)$$

Nach (20.1.27) ist

$$\mathbf{U}_{u, 1} = ((l_{u, 0}, (u(t_0-), u(t_0), u(t_0+)), r_{u, 0})). \quad (20.1.42)$$

- Wenn $k_0 = 0$ ist, dann liefern die obigen Gleichungen, dass

$$\begin{aligned} & (l_{u \circ \alpha, 0}, (u \circ \alpha(s_0-), u \circ \alpha(s_0), u \circ \alpha(s_0+)), r_{u \circ \alpha, 0}) \\ &= (l_{u, 0}, (u(t_0-), u(t_0), u(t_0+)), r_{u, 0}). \end{aligned} \quad (20.1.43)$$

Mit (20.1.42) und (20.1.28) erkennt man nun, dass $\mathbf{U}_{u, 0} = \mathbf{U}_{u \circ \alpha, 0}$.

- Wenn $k_0 \neq 0$ ist, dann ist $k_0 = 1$. Durch Kombination von (20.1.40), (20.1.41) (20.1.22) und (20.1.23), erhält man, dass

$$\begin{aligned} & (l_{u \circ \alpha, 0}, (u \circ \alpha(s_0-), u \circ \alpha(s_0), u \circ \alpha(s_0+)), r_{u \circ \alpha, 0}) \\ &= (l_{u, 0}, (u(t_0), u(t_0), u(t_0)), 1), \end{aligned} \quad (20.1.44)$$

$$\begin{aligned} & (l_{u \circ \alpha, 1}, (u \circ \alpha(s_1-), u \circ \alpha(s_1), u \circ \alpha(s_1+)), r_{u \circ \alpha, 1}) \\ &= (1, (u(t_0), u(t_0), u(t_0+)), r_{u, 0}). \end{aligned} \quad (20.1.45)$$

Nach (20.1.28) ist somit

$$\mathbf{U}_{u \circ \alpha, 1} = ((l_{u,0}, (u(t_0), u(t_0), u(t_0)), 1), (1, (u(t_0), u(t_0), u(t_0+)), r_{u,0})). \quad (20.1.46)$$

Nun sieht man mit (20.1.42) und Def. 17.3.13, dass $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, 1}$ durch Wiederholung einer Quintupel-Mitte aus $\mathbf{U}_{u,1}$ erzeugt wird.

Ind. Sch.: Es sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $m \leq n$ gegeben, so dass $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, k_{m-1}} = \mathbf{U}_{u, m-1}$ oder $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, k_{m-1}}$ durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus $\mathbf{U}_{u, m-1}$ erzeugt wird.

Aus (20.1.16), (20.1.17), (20.1.20) und (20.1.21) folgt

$$u \circ \alpha(s_{k_{m-1}+1}-) = u(t_m-), \quad u \circ \alpha(s_{k_m}+) = u(t_m+), \quad (20.1.47a)$$

$$r_{u, m} = r_{u \circ \alpha, k_m}, \quad l_{u \circ \alpha, k_{m-1}+1} = l_{u, m}. \quad (20.1.47b)$$

Aus (20.1.27) ergibt sich somit, dass

$$\mathbf{U}_{u, m} = \text{concat}(\mathbf{U}_{u, m-1}, U_m), \quad (20.1.48)$$

mit

$$U_m := (l_{u, m}, (u(t_m-), u(t_m), u(t_m+)), r_{u, m}). \quad (20.1.49)$$

- Wenn $k_m = k_{m-1} + 1$ ist, dann liefern die obigen Gleichungen, dass

$$(l_{u \circ \alpha, k_m}, (u \circ \alpha(s_{k_m}-), u \circ \alpha(s_{k_m}), u \circ \alpha(s_{k_m}+)), r_{u \circ \alpha, k_m}) = U_m. \quad (20.1.50)$$

Aus (20.1.28) folgt somit, dass

$$\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m} = \text{concat}(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m-1}, U_m). \quad (20.1.51)$$

Da $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m-1}$ entweder gleich $\mathbf{U}_{u, m}$ ist, oder aus diesem durch Wiederholung von Quintupel-Mitten erzeugt wird, erhält man die gleiche Beziehung zwischen $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m}$ und $\mathbf{U}_{u, m}$.

- Wenn $k_m = k_{m-1} + 1$ ist, dann ist $k_m = k_{m-1} + 2$ und aus (20.1.28) folgt, dass

$$\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m} = \text{concat}(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m-1}, (U_{u \circ \alpha, k_{m-1}}, U_{u \circ \alpha, k_m})) \quad (20.1.52)$$

mit

$$U_{u \circ \alpha, i} := (l_{u \circ \alpha, i}, (u \circ \alpha(s_i-), u \circ \alpha(s_i), u \circ \alpha(s_i+)), r_{u \circ \alpha, i}), \quad \forall i = k_m - 1, k_m. \quad (20.1.53)$$

Mit $k_{m-1} + 1 = k_m - 1$, (20.1.47), (20.1.24) und (20.1.25) folgt, dass

$$U_{u \circ \alpha, k_{m-1}} = (l_{u, m}, (u(t_m-), u(t_m), u(t_m)), 1), \quad (20.1.54)$$

$$U_{u \circ \alpha, k_m} = (1, (u(t_m), u(t_m), u(t_m+)), r_{u, m}). \quad (20.1.55)$$

Dann liefert (20.1.49) und Def. 17.3.13, dass $(U_{u \circ \alpha, k_{m-1}}, U_{u \circ \alpha, k_m})$ durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus $U_{u, m}$ erzeugt wird.

Da $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m-1}$ entweder gleich $\mathbf{U}_{u, m}$ ist, oder durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus diesen erzeugt wird, erkennt man mit (20.1.52), (20.1.49) und Def. 17.3.15, dass $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, m}$ durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus $\mathbf{U}_{u, m}$ erzeugt wird.

□

20.1.7 Satz. Für den Gedächtnis-Operator $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.} : \text{Map}_{pw.mo.af.co.in.}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], S_F^{b,3,b}(X))$ ergibt sich für alle $u \in \text{Map}_{pw.mo.af.co.in.}([0, T]; X)$, alle zulässigen Zeittransformation $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ und alle $t \in [0, T]$:

Es gilt entweder, dass

- $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[u \circ \alpha](t) = \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[u](\alpha(t))$ ist,
- oder dass $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[u \circ \alpha](t)$ durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[u](\alpha(t))$ erzeugt wird.

Beweis. Es seien $u \in \text{Map}_{pw.mo.af.co.in.}([0, T]; X)$ und eine zulässige Zeittransformation $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$ gegeben. Es sei $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ für u .

Es seien $r_{u,0}, \dots, r_{u,n-1} \in \{0, 1\}$, und $l_{u,1}, \dots, l_{u,n} \in \{0, 1\}$ wie im Lemma 20.1.3.

Es seien $\sigma_{0,\min} \leq \sigma_{0,\max} \leq \sigma_{1,\min} \leq \sigma_{1,\max} \leq \dots \leq \sigma_{n,\min} \leq \sigma_{n,\max}$, $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_n$ und $0 =: s_0 < s_1 < \dots < s_{k_n} = T$ definiert wie im Lemma 19.2.9.

Dann ist $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{k_n} = T$ die Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ für $u \circ \alpha$, und es gilt $s_\ell = t_0$ für alle $\ell = 0, \dots, k_0$ und $s_j = t_i$ für alle $j = k_{i-1} + 1, \dots, k_i$ und alle $i = 1, \dots, n$.

Betrachtet man das Lemma 20.1.3 mit u ersetzt durch $u \circ \alpha$, so erhält man $r_{u \circ \alpha, 0}, \dots, r_{u \circ \alpha, k_n-1} \in \{0, 1\}$, $l_{u \circ \alpha, 1}, \dots, l_{u \circ \alpha, k_n} \in \{0, 1\}$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[u \circ \alpha](0) &= ((1, (u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0)), 1), \\ &\quad (1, (u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0)), 1)), \end{aligned} \quad (20.1.56)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[u \circ \alpha](s) &= \text{concat}_{X^3} \left(((l_i, (u \circ \alpha(s_i-), u \circ \alpha(s_i), u \circ \alpha(s_i+)), r_i))_{i=0}^{m-1}, \right. \\ &\quad \left. (1, (u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s)), 1) \right), \\ &\quad \forall s \in]s_{m-1}, s_m[, m = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (20.1.57)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{pw.mo.af.co.in.}[u \circ \alpha](s_m) &= \text{concat}_{X^3} \left(((l_i, (u \circ \alpha(s_i-), u \circ \alpha(s_i), u \circ \alpha(s_i+)), r_i))_{i=0}^{m-1}, \right. \\ &\quad \left. (l_k, (u \circ \alpha(s_m-), u \circ \alpha(s_m), u \circ \alpha(s_m)), 1) \right), \\ &\quad \forall m = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (20.1.58)$$

Es seien $\mathbf{U}_{u,1}, \dots, \mathbf{U}_{u,n}$ definiert durch (20.1.27). Weiterhin seien $\mathbf{U}_{u \circ \alpha,1}, \dots, \mathbf{U}_{u \circ \alpha,n}$ definiert durch (20.1.28).

- Betrachtet man (20.1.56) und (20.1.4), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](0) \\
 &= ((1, (u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0)), 1), (1, (u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0)), 1)) \\
 &= ((1, (u(0), u(0), u(0)), 1), (1, (u(0), u(0), u(0)))) \\
 &= \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](0) = \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(0)).
 \end{aligned} \tag{20.1.59}$$

- Es sei $s \in]0, T]$ mit $\alpha(s) = 0$ beliebig, sofern ein solches s existiert.

Die Setzungen in Lemma 19.2.9 liefern, dass $s \leq s_1$, $s_0 = 0$ und $k_0 = 1$ ist. Kombiniert man (20.1.57), (20.1.58) und (20.1.23), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s) \\
 &= ((1, (u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0), u \circ \alpha(0)), 1), (1, (u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s)), 1)).
 \end{aligned} \tag{20.1.60}$$

Mit (20.1.22) und (20.1.59) erhält man nun,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s) = ((1, (u(0), u(0), u(0)), 1), (1, (u(0), u(0), u(0)), 1)) \\
 &= \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](0) = \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s)).
 \end{aligned} \tag{20.1.61}$$

- Es sei jetzt $s \in]0, T]$ beliebig, so dass $\alpha(s) > 0$ ist und es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $s \in]s_{k_{i-1}}, s_{k_{i-1}+1}]$.

Aus (20.1.57) und (20.1.58) folgt durch Anwendung von (20.1.28):

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s) \\
 &= \begin{cases} \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, (1, (u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s)), 1) \right), \\ \quad \text{wenn } s \in]s_{k_{i-1}}, s_{k_{i-1}+1}[, \\ \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, \right. \\ \quad \left. (l_{u \circ \alpha, k_{i-1}+1}, (u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1}-), u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1}), u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1})), 1) \right), \\ \quad \text{wenn } s = s_{k_{i-1}+1}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{20.1.62}$$

Daraus folgt mit (20.1.21), (20.1.16) und $\alpha(s_{k_{i-1}+1}) = t_i$, dass

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s) \\
 &= \begin{cases} \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, (1, (u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s)), 1) \right), \\ \quad \text{wenn } s \in]s_{k_{i-1}}, s_{k_{i-1}+1}[, \\ \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, (l_{u, i}, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i)), 1) \right), \quad \text{wenn } s = s_{k_{i-1}+1}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{20.1.63}$$

– Wenn $\alpha(s) = t_{i-1}$:

Dann ist $t_{i-1} > 0$ und somit $i \geq 2$. Damit dieser Fall eintreten kann, muss $s_{k_{i-1}} < s \leq \sigma_{i-1,\max}$ sein, und damit $s < s_{k_{i-1}} + 1$.

Mit dem Lemma 19.2.9 folgt, dass $\sigma_{k_{i-1}} = \sigma_{i-1,\min} < \sigma_{i-1,\max}$ sein muss, und dass $u(t_{i-1}) = u(t_{i-1}+)$ und $k_{i-2} + 1 = k_{i-1}$ ist. Aus (20.1.6) und (20.1.27) folgt, dass

$$\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](t_{i-1}) = \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u,i-1}, (l_i, (u(t_{i-1}-), u(t_{i-1}), u(t_{i-1}+)), 1) \right). \quad (20.1.64)$$

Mit (20.1.28), $k_{i-1} = k_{i-2} + 1$, (20.1.16), (20.1.17), (20.1.20) und (20.1.21) erkennt man, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{u \circ \alpha, i} &= \text{concat}(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i-1}, \\ &\quad (l_{u \circ \alpha, i-1}, (u \circ \alpha(s_{k_{i-1}}-), u \circ \alpha(s_{k_{i-1}}), u \circ \alpha(s_{k_{i-1}}+)), r_{u \circ \alpha, i-1})) \\ &= \text{concat}(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i-1}, (l_{u \circ \alpha, i-1}, (u(t_{i-1}-), u(t_{i-1}), u(t_{i-1}+)), r_{u, i-1})). \end{aligned} \quad (20.1.65)$$

Da $u(t_{i-1}) = u(t_{i-1}+)$ ist, muss $r_{u, i-1} = 1$ sein. Nutzt man jetzt noch aus, dass $s < s_{k_{i-1}+1}$ und $\alpha(s) = t_{i-1}$ ist, so folgt mit (20.1.63):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s) &= \text{concat} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i-1}, ((l_{u \circ \alpha, i-1}, (u(t_{i-1}-), u(t_{i-1}), u(t_{i-1}+)), r_{u, i-1}), \right. \\ &\quad \left. (1, (u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s)), 1)) \right) \\ &= \text{concat} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i-1}, ((l_{u \circ \alpha, i-1}, (u(t_{i-1}-), u(t_{i-1}), u(t_{i-1})), 1), \right. \\ &\quad \left. (1, (u(t_{i-1}), u(t_{i-1}), u(t_{i-1})), 1)) \right). \end{aligned} \quad (20.1.66)$$

Da $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i-1}$ entweder gleich $\mathbf{U}_{u, i-1}$ ist oder durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus diesen erzeugt wird, erkennt man mit (20.1.64), dass man $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s)$ durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](t_{i-1}) = \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s))$ erzeugt wird.

– Wenn $\alpha(s) \in]t_{i-1}, t_i[$:

Aus (20.1.5) und (20.1.27) ergibt sich, dass

$$\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s)) = \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u,i}, (1, (u(\alpha(s)), u(\alpha(s)), u(\alpha(s))), 1) \right). \quad (20.1.67)$$

Da $\alpha(s) < t_i$ ist, folgt, dass $s < \sigma_{i,\min} \leq s_{k_{i-1}+1}$. Somit liefert (20.1.63), dass

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s) \\ &= \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, (1, (u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s)), 1) \right). \end{aligned} \quad (20.1.68)$$

Da $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i-1}$ entweder gleich $\mathbf{U}_{u, i-1}$ ist oder durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus diesen erzeugt wird, erkennt man jetzt, dass zwischen $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s)$ und $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s))$ die gleiche Beziehung vorliegt.

– Wenn $\alpha(s) \notin [t_{i-1}, t_i[$:

Dann ist $\alpha(s) = t_i$ und mit (20.1.6) und (20.1.27) erkennt man, dass

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s)) \\ &= \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u, i}, (l_{u, i}, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i)), 1) \right). \end{aligned} \quad (20.1.69)$$

- * Wenn $s = s_{k_{i-1}+1}$ ist, dann sieht man mit (20.1.63), dass aus der Tatsache, dass $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i-1}$ entweder gleich $\mathbf{U}_{u, i-1}$ ist oder durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus diesen erzeugt wird, direkt folgt, dass zwischen $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s)$ und $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s))$ die gleiche Beziehung vorliegt.
- * Wenn $s < s_{k_{i-1}+1}$ ist, dann ist, da $\alpha(s) = t_i$ impliziert, dass $s \geq \sigma_{i,\min}$, $\sigma_{i,\min} < s_{k_{i-1}+1}$. Betrachtet man die Setzungen im Lemma 19.2.9, dann folgt dass $u(t_i-) = u(t)$ sein muss. Also ist $l_{u, i} = 1$. Somit erhält man aus (20.1.69), dass

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s)) \\ &= \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u, i}, (1, (u(t_i), u(t_i), u(t_i)), 1) \right). \end{aligned} \quad (20.1.70)$$

Aus (20.1.63) ergibt sich, dass

$$\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s) = \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, (1, (u(t_i), u(t_i), u(t_i)), 1) \right). \quad (20.1.71)$$

Wieder folgt aus der Tatsache, dass $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i-1}$ entweder gleich $\mathbf{U}_{u, i-1}$ ist oder durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus diesen erzeugt wird, dass zwischen $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s)$ und $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s))$ die gleiche Beziehung besteht.

- Es sei jetzt $s \in]0, T]$ beliebig, so dass $\alpha(s) > 0$ ist und es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $s \in]s_{k_{i-1}+1}, s_{k_i}]$, sofern ein solches s existiert.

Betrachtet man das Lemma 19.2.9, so sieht man, dass in diesem Fall $s_{k_{i-1}+1} = \sigma_{i,\min}$ und $s_{k_i} = \sigma_{i,\max}$ gelten und daher $\alpha(s) = t_i$ ist.

Aus (20.1.57) und (20.1.58) folgt durch Anwendung von (20.1.28)

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s) \\ &= \begin{cases} \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, \right. \\ \quad \left((l_{u \circ \alpha, k_{i-1}+1}, (u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1}-), u \circ \alpha(s_{k_{i-1}}), u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1}+)), r_{u \circ \alpha, k_{i-1}+1}), \right. \\ \quad \left. (1, (u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s), u \circ \alpha(s)), 1) \right) \Big), & \text{wenn } s \in]s_{k_{i-1}+1}, s_{k_i}[, \\ \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, \right. \\ \quad \left((l_{u \circ \alpha, k_{i-1}+1}, (u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1}-), u \circ \alpha(s_{k_{i-1}}), u \circ \alpha(s_{k_{i-1}+1}+)), r_{u \circ \alpha, k_{i-1}+1}), \right. \\ \quad \left. (l_{u \circ \alpha, k_i}, (u \circ \alpha(s_{k_i}-), u \circ \alpha(s_{k_i}), u \circ \alpha(s_{k_i})), 1) \right) \Big), & \text{wenn } s = s_{k_i}. \end{cases} \end{aligned} \quad (20.1.72)$$

Mit Hilfe von (20.1.16), (20.1.21), (20.1.24), (20.1.25) und $\alpha(s) = t_i$ erhält man

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s) \\ &= \begin{cases} \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, \right. \\ \quad \left((l_{u, i}, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i)), 1), \right. \\ \quad \left. (1, (u(t_i), u(t_i), u(t_i)), 1) \right) & \text{wenn } s \in]s_{k_{i-1}+1}, s_{k_i}[, \\ \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i}, \right. \\ \quad \left((l_{u, i}, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i)), 1), \right. \\ \quad \left. (1, (u(t_i), u(t_i), u(t_i)), 1) \right) \Big), & \text{wenn } s = s_{k_i}. \end{cases} \end{aligned} \quad (20.1.73)$$

Aus (20.1.6) und (20.1.27) folgt, dass

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s)) = \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](t_i) \\ &= \text{concat}_{X^3} \left(\mathbf{U}_{U, i}, (l_{u, i}, (u(t_i-), u(t_i), u(t_i)), 1) \right). \end{aligned} \quad (20.1.74)$$

Aus der Tatsache, dass $\mathbf{U}_{u \circ \alpha, i-1}$ entweder gleich $\mathbf{U}_{u, i-1}$ ist, oder durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus diesen erzeugt wird, ergibt sich somit, das $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u \circ \alpha](s)$ durch Wiederholung von Quintupel-Mitten aus $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](\alpha(s))$ erzeugt wird.

□

20.2. Generierte Hysterese-Operatoren für stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Funktionen

In diesem Abschnitt sei $T > 0$ fest, und es sei X ein linear topologischer Vektorraum, Es sei $B := \{0, 1\}$.

Dank des Lemmas 20.1.4 und des Satzes 20.1.7 ist klar, dass die folgende Definition zu einen Hysterese-Operator führt:

20.2.1 Definition. Es sei eine Funktion $G : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ gegeben, die bezüglich der Wiederholung von Quintupel-Mitten invariant ist. Die Abbildung

$$\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}} := G \circ \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}} : \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y), \quad (20.2.1)$$

wird als der *von G auf $\text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ generierte Hysterese-Operator* bezeichnet.

Mit Hilfe der Definition von $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}$ in (20.1.1) erhält man:

20.2.2 Bemerkung. Es sei eine Funktion $G : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ gegeben, die bezüglich der Wiederholung von Quintupel-Mitten invariant ist. Dann gilt für alle $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$:

$$\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u](T) = G\left(\rho_{S_F^{b,3,b}(X),T}(u)\right). \quad (20.2.2)$$

20.2.3 Lemma. Es sei eine Funktion $G : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ gegeben, die bezüglich der Wiederholung von Quintupel-Mitten invariant ist. Dann ist

$$\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \left\langle \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}} \right\rangle = G. \quad (20.2.3)$$

Beweis. Es sei $\mathbf{U} \in S_F^{b,3,b}(X)$ beliebig. Dann folgt aus Def. 18.4.1, (20.2.2) und Lemma 19.3.4:

$$\begin{aligned} \text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \left\langle \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}} \right\rangle (\mathbf{U}) &= \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}} [\pi_{\text{pw.af.int.}} [\mathbf{U}]] (T) \\ &= G\left(\rho_{S_F^{b,3,b}(X),T}(\pi_{\text{pw.af.int.}} [\mathbf{U}])\right) = G(\mathbf{U}). \end{aligned} \quad (20.2.4)$$

□

20.2.4 Zweiter neuer Darstellungssatz für Hysterese-Operatoren.

a) Für jeden Hysterese-Operator $\mathcal{G} : \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gibt eine eindeutig definierte Funktion $G : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$, die bezüglich der Wiederholung von Quintupel-Mitten invariant ist, so dass \mathcal{G} der von G auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}}$ ist.

b) Die in a) betrachtete Funktion G ist gleich der in Def. 18.4.1 definierten Funktion $\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle$.

Beweis. Es sei ein Hysterese-Operator $\mathcal{G} : \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ gegeben. Es sei G die in Def. 18.4.1 definierte Funktion $\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H} \rangle$. Dann folgt aus (20.2.3), dass

$$\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}} \rangle = G = \text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{G} \rangle. \quad (20.2.5)$$

Wendet man das Lemma 18.4.5 auf die Einschränkungen von $\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}}$ und \mathcal{G} auf $\text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ an, so erhält man, dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[v] = \mathcal{G}[v], \quad \forall v \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X). \quad (20.2.6)$$

Für $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ sei jetzt $\text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}^{\text{int}}[u]$ die in Def. 19.3.6 definierte Parametrisierung von u . Dank (19.3.22) kann man mit Hilfe der Ratenunabhängigkeit der beteiligten Operatoren erhalten, dass

$$\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u] = \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}} \left[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\rho_{S_F^{b,3,b}(X), T}(u)] \right] \circ \text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}^{\text{int}}[u], \quad (20.2.7)$$

$$\mathcal{H}[u] = \mathcal{H} \left[\pi_{\text{pw.af.int.}}[\rho_{S_F^{b,3,b}(X), T}(u)] \right] \circ \text{Para}_{[0,T] \rightarrow [0,T]}^{\text{int}}[u]. \quad (20.2.8)$$

Da $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\rho_{S_F^{b,3,b}(X), T}(u)] \in \text{Map}_{\text{pw.af.int.}}([0, T]; X)$ liefert (20.2.6), dass $\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}}[u] = \mathcal{G}[u]$.

Dies zeigt, dass \mathcal{G} der von G auf $\text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ generierte Hysterese-Operator ist.

Es bleibt zu zeigen, dass G die einzige Funktion mit den beschriebenen Eigenschaften ist. Sei jetzt $F : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$ eine beliebige Funktion, die bezüglich der Wiederholung von Quintupel-Mitten invariant ist, so dass \mathcal{G} der von F auf $\text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X)$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_F^{\text{pw.mo.af.co.in.}}$ ist. Mit (20.2.3) sieht man, dass

$$F = \text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H}_F^{\text{pw.mo.af.co.in.}} \rangle = \text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{G} \rangle = \text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}} \rangle = G. \quad (20.2.9)$$

□

20.2.5 Bemerkung. Dank des Satzes 20.2.4 gibt es für jeden Hysterese-Operator $\mathcal{G} : \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; X) \rightarrow \text{Map}([0, T], Y)$ eine eindeutig definierte Funktion $G : S_F^{b,3,b}(X) \rightarrow Y$, die bezüglich der Wiederholung von Quintupel-Mitten invariant ist, so dass \mathcal{G} der von G auf $C_{\text{pw.mo.af.}}([0, T]; X_1)$ generierte Hysterese-Operator $\mathcal{H}_G^{\text{pw.mo.af.co.in.}}$ ist. Nach Def. 20.2.1 ist dann

$$\mathcal{G} = G \circ \mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}. \quad (20.2.10)$$

a) Um den Wert des Hysterese-Operators für eine gegebene Input-Funktion u auszuwerten, ist es somit ausreichend, die Informationen zu ermitteln und zu speichern, die man zur Bestimmung des Wertes von $\mathcal{M}_{S_F^{b,3,b}(X)}^{\text{pw.mo.af.co.in.}}$ braucht. Nach dem Lemma 20.1.3 sind

für die endlich vielen Zeitpunkte t_0, \dots, t_n der Standard-Monotaffinitäts-Stetigkeits-Zerlegung von $[0, T]$ bezüglich der Funktion u , die man daran erkennen kann, dass u zu diesen u unstetig ist, oder/oder seine Richtung ändert, jeweils die folgenden Informationen zu speichern:

- den Funktionswert $u(t_i)$,
- die links- und rechtsseitigen Grenzwerte der Input-Funktion für diesen Zeitpunkt, d.h. $u(t_i-)$ und $u(t_i+)$,
- die Information darüber, ob dieser Grenzwerte in dem jeweiligen Intervall angenommen werden, mit einer oder Verknüpfung abgelegt in $r_{u,i}$ und $l_{u,i}$ definiert wie im Lemma 20.1.3. Nutzt man die Monotaffinität im Inneren von $[t_{i-1}, t_i]$, so sieht man, dass für $\tau, \tau' \in]t_{i-1}, t_i[$ gilt

$$r_{u,i-1} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t_{i-1}) = u(t_{i-1}), \\ 1, & \text{wenn } u(t_{i-1}+) \in u(]t_{i-1}, \tau]), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (20.2.11)$$

$$l_{u,i} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } u(t_i) = u(t_i-), \\ 1, & \text{wenn } u(t_i-) \in u(] \tau', t_i]), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20.2.12)$$

Dies bedeutet insbesondere, dass der Wert für $r_{u,i-1}$ schon durch $u(]t_{i-1}, \tau])$ für $\tau > t_{i-1}$ beliebig nahe an t_{i-1} festgelegt ist.

Diese Darstellung erlaubt es, eine stückweise im Intervallinneren monotaffine und stetige Input-Funktion mit endlich vielen Quintupeln so zu beschreiben, dass diese Informationen als Input für das vom Hysterese-Operator generierte Funktional ausreichen, um den Wert des Hysterese-Operators zu bestimmen.

- b) Da man den Hysterese-Operator \mathcal{H} eindeutig mit der von ihm generierten Funktion G identifizieren kann, kann man, analog zu skalaren oder zu vektorwertige stetigen Fall, Eigenschaften des Operators als Eigenschaften der Funktion auf den Quintupel-Strings zu formulieren.
- Es ist nicht offensichtlich, inwieweit man Eigenschaften wie Kongruenz oder das Vergessen von Madelung-Zyklen sinnvoll auf unstetige Input-Funktionen überträgt. Ein einfacher Ansatz, wäre es, die Eigenschaften nur für die stetigen Abschnitte der Input-Funktion zu fordern.
 - Die Kongruenz-Eigenschaft in periodischen Bereichen der Input-Funktion kann direkt auch auf unstetige Input-Funktionen übertragen werden, und die Formulierung für die String-Funktion sollte sich analog zu denen für stetige Input-Funktionen wie im Abschnitt 12.2 formulieren lassen

Entsprechende Betrachtungen bleiben aus Zeitgründen späteren Untersuchungen vorbehalten.

20.3. Beispiele für generierte Funktionen

Da nach dem Satz 20.2.4 jeder Hysterese-Operator \mathcal{G} , der auf den stückweise im Intervallinneren monotaffinen und stetigen Funktionen definiert ist, auf den entsprechenden Funktionenraum durch die nach Def. 18.4.1 generierte Funktion $\text{Gen}_{S_F^{b,3,b}(X)} \langle \mathcal{G} \rangle$ eindeutig beschreiben wird, sollen ein paar Beispiele für derartige Funktionen vorgestellt werden.

20.3.1. Die BV-Erweiterung auf Basis der Bogenlängen-Reparametrisierung wie im Abschnitt 16.2

20.3.1 Lemma. *Es sei H ein Hilbert-Raum. Es sei $\mathcal{H} : \text{Lip}([0, T]; H) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ ein Hysterese-Operator. Es sei $G : S(H) \rightarrow H$ die Funktion, die \mathcal{H} generiert, d.h. $G = \text{Gen}_{S_F(H)} \langle \mathcal{H} \rangle$.*

Dann gilt die BV-Erweiterung $\mathcal{BV}\langle \mathcal{H} \rangle : BV([0, T]; H) \rightarrow \text{Map}([0, T], H)$ von \mathcal{H} gemäß Def. 16.2.2, dass für alle $\mathbf{U} = ((l_0, (x_0, y_0, z_0), l_0), \dots, (l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n)) \in S^{b,3,b}(X)$ gilt, dass

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(H)} \langle \mathcal{BV}\langle \mathcal{H} \rangle \rangle (\mathbf{U}) = G(y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, x_n, y_n). \quad (20.3.1)$$

Beweis. Aus der Def. 16.2.2, folgt, dass

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(H)} \langle \mathcal{BV}\langle \mathcal{H} \rangle \rangle (\mathbf{U}) = \mathcal{H} \left[\text{rpa}_{\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]} \right] (T), \quad (20.3.2)$$

ist, wobei $\text{rpa}_{\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]}$ die Reparametrisierung von $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ bezüglich der normalisierten Bogenlänge nach Def. 16.1.5 ist.

Kombiniert man die Def. 18.3.2 von $\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]$ mit der Vorbereitung der Reparametrisierung im Lemma 16.1.3, dann sieht man, dass $\text{rpa}_{\pi_{\text{pw.af.int.}}[\mathbf{U}]}$ eine stückweise affine Funktion ist, die von $x_0 = y_0$ affin zum Punkt z_0 läuft, dann zu Punkt x_1 , weiter nach y_1 , dann weiter nach z_1 , dann zum Punkt x_2 u.s.w., bis sie schließlich am Ende vom Punkt x_n zum Punkt $y_n = z_n$ läuft. Dies führt zu der oben formulierten Gleichung. \square

20.3.2. Papierschnipsel und ein klebriges punktförmiges Hindernis wie in Abschnitt 16.4.1

Es sei $h \in \mathbb{R}^2$. Es sei $\tilde{\mathcal{A}}_h : \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Map}([0, T], \mathbb{R}^2)$ der Operator, der sich ergibt, wenn man für $u \in \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; \mathbb{R}^2)$ die rechte Seite von 16.4.1 betrachtet. Dann gilt

$$\tilde{\mathcal{A}}_h[u](t) := \begin{cases} h, & \text{wenn } u(\tau) = h, \quad \exists \tau \in [0, t], \\ u(t), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (20.3.3)$$

und für alle $\mathbf{U} = ((l_0, (x_0, y_0, z_0), l_0), \dots, (l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n)) \in S^{b,3,b}(\mathbb{R}^2)$ gilt:

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(H)} \left\langle \tilde{\mathcal{A}}_h \right\rangle (\mathbf{U}) = \begin{cases} h, & \text{wenn } h = y_i, \quad \exists i \in \{0, \dots, n\}, \\ h, & \text{wenn } h \in \text{conv}(z_{i-1}, x_i) \setminus \{z_{i-1}, x_i\}, \quad \exists i \in \{1, \dots, n\}, \\ h, & \text{wenn } h = x_i, \quad l_i = 1, \quad \exists i \in \{1, \dots, n\}, \\ h, & \text{wenn } h = z_i, \quad r_i = 1, \quad \exists i \in \{0, \dots, n-1\}, \\ y_n, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20.3.4)$$

20.3.3. Der RVM-BALL-RELAY-Operator erweitert auf unstetige Input-Funktionen wie im Abschnitt 16.4.2

Ersetzt man bei der im Abschnitt 16.4.2 definierte Fortsetzung des außenschaltenden RVM-BALL-RELAY-Operator $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball}}$ die Definitionsmenge durch $\text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; \mathbb{R}^N)$, so erhält man

$$\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2} : \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$$

mit

$$\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} \zeta_\xi(u(t)), & \text{wenn } \|u(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r, \\ \eta_0, & \text{wenn } \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \leq r, \quad \forall s \in [0, t], \\ \zeta_\xi \circ u(\sup\{s \in [0, t] \mid \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\} -), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (20.3.5)$$

mit $\zeta_\xi = \frac{v-\xi}{\|v-\xi\|_{\mathbb{R}^N}}$ für alle $v \neq \xi$.

Für $\eta_0 \in B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $\mathbf{U} = ((l_0, (x_0, y_0, z_0), l_0), \dots, (l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n)) \in S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)$ sei

$$N_{\mathbf{U},x,>r} := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \|x_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\}, \quad (20.3.6)$$

$$N_{\mathbf{U},y,>r} := \{i \in \{0, \dots, n\} \mid \|y_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\}, \quad (20.3.7)$$

$$N_{\mathbf{U},z,>r} := \{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \|z_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\}. \quad (20.3.8)$$

- Wenn $n \in N_{\mathbf{U},y,>r}$, dann gilt

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)} \left\langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2}[\eta_0, \cdot] \right\rangle (\mathbf{U}) = \zeta_\xi(y_n). \quad (20.3.9)$$

- Wenn $n \in N_{\mathbf{U},x,>r}$ und $n \notin N_{\mathbf{U},y,>r}$

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)} \left\langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2}[\eta_0, \cdot] \right\rangle (\mathbf{U}) = \zeta_\xi(x_n). \quad (20.3.10)$$

- Wenn ein $k \in \{0, \dots, n-1\} \cap N_{\mathbf{U},z,>r}$ existiert, so dass

$$\{k+1, \dots, n\} \cap (N_{\mathbf{U},x,>r} \cup N_{\mathbf{U},y,>r} \cup N_{\mathbf{U},z,>r}) = \emptyset,$$

dann gilt für $\lambda_0 := \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \|(1-\lambda)z_k + \lambda x_{k+1} - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\}$:

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)} \left\langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2}[\eta_0, \cdot] \right\rangle (\mathbf{U}) = \zeta_\xi((1-\lambda_0)z_k + \lambda_0 x_{k+1}). \quad (20.3.11)$$

- Wenn ein $k \in \{0, \dots, n-1\} \cap (N_{\mathbf{U},y,>r})$ existiert, so dass $k \notin N_{\mathbf{U},z,>r}$ und $\{k+1, \dots, n\} \cap (N_{\mathbf{U},x,>r} \cup N_{\mathbf{U},y,>r} \cup N_{\mathbf{U},z,>r}) = \emptyset$, dann:

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)} \left\langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2}[\eta_0, \cdot] \right\rangle (\mathbf{U}) = \zeta_\xi(y_k). \quad (20.3.12)$$

- Wenn ein $k \in \{0, \dots, n-1\} \cap N_{\mathbf{U},x,>r}$ existiert, so dass $k \notin N_{\mathbf{U},y,>r} \cup N_{\mathbf{U},z,>r}$ und $\{k+1, \dots, n\} \cap (N_{\mathbf{U},x,>r} \cup N_{\mathbf{U},y,>r} \cup N_{\mathbf{U},z,>r}) = \emptyset$, dann:

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)} \left\langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2}[\eta_0, \cdot] \right\rangle (\mathbf{U}) = \zeta_\xi(x_k). \quad (20.3.13)$$

- Andernfalls ist

$$\text{Gen}_{S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)} \left\langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2}[\eta_0, \cdot] \right\rangle (\mathbf{U}) = \eta_0. \quad (20.3.14)$$

Geht man analog zur Bildung von $\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2}$ für den „normalen“ RVM-BALL-RELAY-Operator vor, so erhält man

$$\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball,exten}} : \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}) \times \text{Map}_{\text{pw.mo.af.co.in.}}([0, T]; \mathbb{R}^N) \rightarrow \text{Map}([0, T], \partial B_1(0_{\mathbb{R}^N}))$$

mit

$$\mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball,exten}}[\eta_0, u](t) := \begin{cases} \zeta_\xi(u(t)), & \text{wenn } \|u(t) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r, \\ \eta_0, & \text{wenn } \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} < r, \quad \forall s \in [0, t], \\ \zeta_\xi \circ u \left(\sup \{s \in [0, t] \mid \|u(s) - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r\} - \right), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (20.3.15)$$

Für $\eta_0 \in B_1(0_{\mathbb{R}^N})$ und $\mathbf{U} = ((l_0, (x_0, y_0, z_0), l_0), \dots, (l_n, (x_n, y_n, z_n), r_n)) \in S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)$ erhält man den Wert von $\text{Gen}_{S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)} \left\langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{RVM-ball,exten}}[\eta_0, \cdot] \right\rangle (\mathbf{U})$ analog zu den obigen Formeln für $\text{Gen}_{S^{b,3,b}(\mathbb{R}^N)} \left\langle \mathcal{R}_{\xi,r}^{\text{out,RVM-ball,exten},2}[\eta_0, \cdot] \right\rangle (\mathbf{U})$; man muss nur $N_{\mathbf{U},x,>r}$, $N_{\mathbf{U},y,>r}$ und $N_{\mathbf{U},z,>r}$ durch die folgenden Mengen ersetzen:

$$N_{\mathbf{U},x,\geq r} := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \|x_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\} \cup \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \|x_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} = r, l_i = 1\}, \quad (20.3.16)$$

$$N_{\mathbf{U},y,\geq r} := \{i \in \{0, \dots, n\} \mid \|y_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} \geq r\}, \quad (20.3.17)$$

$$N_{\mathbf{U},z,\geq r} := \{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \|z_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} > r\} \cup \{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid \|z_i - \xi\|_{\mathbb{R}^N} = r, r_i = 1\}. \quad (20.3.18)$$

20.3.4. Weitere Beispiele

Die Bestimmung der generierten Funktion für weitere Hysterese-Operatoren mit nicht-stetigen Input, wie z.B. in [7, 42, 43, 44, 63], bleibt aus Zeitgründen späteren Untersuchungen vorbehalten,

Teil VIII.

Literaturverzeichnis und Danksagung

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Jürgen Sprekels für die Einführung in das Thema Hysterese-Operatoren bedanken.

Bei Herrn Prof. Martin Brokate, Herrn Prof. Wolfgang Dreyer und Herrn Prof. Pavel Krejčí bedanke ich mich für anregende Diskussionen.

Bei Frau Heike Sill, Frau Ina Hohn und Herrn Clemens Guhlke möchte ich mich für die Produktion von Kaffee für die Forschungsgruppe „Thermodynamische Modellierung und Analyse von Phasenübergängen“ in den letzten Jahren bedanken.

Bei meinen Töchtern Stefanie und Rebecca Klein möchte ich mich für ihre guten Wünsche, ihr Verständnis und ihre Unterstützung durch die Verwendung des Busses anstelle des Papa-Taxis bedanken.

Und ganz besonders will ich mich bei meiner Frau Ines bedanken, ohne die ich die letzten Monaten nicht durchgehalten hätte. Ich danke ihr voller Liebe für ihre tatkräftige Unterstützung und ihre Liebe. Ich würde dies gerne noch besser sagen können, aber ich finde nicht die richtigen Worte.

Berlin, 25. März 2013

Olaf Klein

Literaturverzeichnis

- [1] H. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 1985.
- [2] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.
- [3] Anonymus Referee. Referee report for [28]. 2012.
- [4] H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, volume 5 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. Notas de Matemática (50).
- [5] M. Brokate. Hysteresis operators. In *Phase Transitions and Hysteresis*, volume 1584 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 1–38. Springer Berlin / Heidelberg, 1994.
- [6] M. Brokate. Rate independent hysteresis. In H.-J. Bungartz, R. H. W. Hoppe, and C. Zenger, editors, *Lectures on applied mathematics*, pages 207–216. Springer, 2000. Proceedings of the symposium organized by the Sonderforschungsbereich 438 on the occasion of Karl-Heinz Hoffmann’s 60th birthday, Munich, June 30–July 1, 1999.
- [7] M. Brokate and P. Krejčí. Duality in the space of regulated functions and the play operator. *Math. Z.*, 245(4):667–688, 2003.
- [8] M. Brokate and J. Sprekels. *Hysteresis and Phase Transitions*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [9] E. Cardelli, E. Della Torre, and A. Faba. Properties of a class of vector hysteron models. *J. Appl. Phys.*, 103, 2008.
- [10] M. d’Aquino and C. Visone. Private communication. E-Mail exchange, 2011.
- [11] E. Della Torre and E. Cardelli. Magnetic vector aftereffect model. *J. Appl. Phys.*, 109(7), 2011.
- [12] E. Della Torre, E. Cardelli, and L. Bennett. Hysteresis loss in vector Preisach models. *COMPEL*, 29(6):1474–1481, 2010.
- [13] E. Della Torre, E. Pinzaglia, and E. Cardelli. Vector modeling — part I: Generalized hysteresis model. *Phys. B*, 372:111–114, 2006. Proceedings of the Fifth International Symposium on Hysteresis and Micromagnetic Modeling (HMM-2005).

- [14] E. Della Torre, E. Pinzaglia, and E. Cardelli. Vector modeling — part II: Ellipsoidal vector hysteresis model. Numerical application to a 2d case. *Phys. B*, 372:115–119, 2006. Proceedings of the Fifth International Symposium on Hysteresis and Micro-magnetic Modeling (HMM-2005).
- [15] E. Dellta Torre. *Magnetic Hysteresis*. IEEE Press, 1999.
- [16] W. Dreyer. Private communication. 2013.
- [17] J. Franců and P. Krejčí. Homogenization of scalar wave equations with hysteresis. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 11:371–391, 1999.
- [18] J. Fůzi. Two Preisach type vector hysteresis models. *Phys. B*, 343(1-4):159 – 163, 2004. Proceedings of the Fourth Intional Conference on Hysteresis and Micromagnetic Modeling (HMM-2003).
- [19] L. Gasiński. Evolution hemivariational inequalities with hysteresis. *Nonlinear Anal.*, 57(3):323–340, 2004.
- [20] L. Gasiński. Evolution hemivariational inequality with hysteresis operator in higher order term. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 24(1):107–120, 2008.
- [21] M. Jais. Classical and weak solutions for semilinear parabolic equations with Preisach hysteresis. *Opuscula Math.*, 28(1):47–62, 2008.
- [22] B. Kaltenbacher and M. Kaltenbacher. Modeling and iterative identification of hysteresis via Preisach operators in pdes. In J. Kraus and U. Langer, editors, *Lectures on advanced computational methods in mechanics*, volume 1 of *Radon Series Comp. Appl. Math.*, pages 1–45. de Gruyter, 2007.
- [23] B. Kaltenbacher and M. Kaltenbacher. Modeling and numerical simulation of ferroelectric material behavior using hysteresis operators. In M. Lallart, editor, *Ferroelectrics - Characterization and Modeling*, pages 561–586. InTech, 2011.
- [24] D. G. Kendall and J. E. Moyal. On the continuity properties of vector-valued functions of bounded variation. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 8:54–57, 1957.
- [25] O. Klein. Asymptotic behaviour for a phase-field model with hysteresis in one-dimensional thermo-visco-plasticity. *Appl. Math.*, 49(4):309–341, 2004.
- [26] O. Klein. Representation of hysteresis operators acting on vector-valued monotaffine functions. In *Annual Research Reports 2012*, pages 39–43. WIAS, 2012.
- [27] O. Klein. Representation of hysteresis operators acting on vector-valued monotaffine functions. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 22:471–500, 2012.
- [28] O. Klein. Representation of hysteresis operators for vector-valued continuous monotaffine input functions by functions on strings. Preprint 1698, Weierstrss Insitute, 2012. Preprint Version of [27].

- [29] O. Klein. Representation of hysteresis operators for vector-valued inputs by functions on strings. *Phys. B*, 407(9):1399 – 1400, 2012. Proceedings of the 8th International Symposium on Hysteresis Modeling and Micromagnetics (HMM 2011).
- [30] O. Klein. Modulbeschreibung „Analytische Eigenschaften von Hysterese-Operatoren“. <http://www.mathematik.hu-berlin.de/studium/modulbeschreibungen-1/analytische-eigenschaften-von-hysterese-operatoren>, WiSe 2008/09. Modulbeschreibungen für Vertiefungsmodule des Wahlpflichtbereiches, Institut für Mathematik, Humboldt–Universität zu Berlin.
- [31] O. Klein. Modulbeschreibung „Mathematische Modellierung von Hysterese-Effekten“. <http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~pahlisch/Module/Hysterese-Modellierung.pdf>, WiSe 2010/11. Modulbeschreibungen für Vertiefungsmodule des Wahlpflichtbereiches, Institut für Mathematik, Humboldt–Universität zu Berlin.
- [32] O. Klein and P. Krejčí. Outwards pointing hysteresis operators and asymptotic behaviour of evolution equations. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 4(5):755–785, Dezember 2003.
- [33] O. Klein and P. Krejčí. Asymptotic behaviour of evolution equations involving outwards pointing hysteresis operators. *Phys. B*, 343:53–58, 2004. Proceedings of the Fourth International Symposium on Hysteresis and Micromagnetic Modeling (HMM-2003).
- [34] O. Klein and A. Mielke. Webseite: Mathematisches Thema „Hysterese-Operatoren und ratenunabhängige Systeme“. <http://www.wias-berlin.de/research/rts/HystOp/>, 2010.
- [35] D. Knees, A. Mielke, and O. Klein. Webseite: Anwendung „Nichtlineare Materialmodelle, multifunktionale Materialien und Hysterese im Zusammenhang mit elastoplastischen Prozessen“. <http://www.wias-berlin.de/research/ats/multifunktional/>, 2010.
- [36] M. Krasnosel’skii and A. Pokrovskii. *Systems with Hysteresis*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1989. Russian edition: Nauka, Moscow, 1983.
- [37] P. Krejčí. *Hysteresis, Convexity and Dissipation in Hyperbolic Equations*, volume 8 of *Gakuto Int. Series Math. Sci. & Appl.* Gakkōtoshō, Tokyo, 1996.
- [38] P. Krejčí. Evolution variational inequalities and multidimensional hysteresis operators. In *Nonlinear differential equations (Chvalatice, 1998)*, volume 404 of *Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math.*, pages 47–110. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

- [39] P. Krejčí. Long-time behavior of solutions to hyperbolic equations with hysteresis. In *Evolutionary equations. Vol. II*, Handb. Differ. Equ., pages 303–370. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005.
- [40] P. Krejčí. Cyclic fatigue in an oscillating elastoplastic body. Talk at Workshop Modeling and Analysis of Phase Separation, Damage and Fracture WIAS Berlin, September 2011.
- [41] P. Krejčí. Private communication. 2011.
- [42] P. Krejčí and P. Laurençot. Generalized variational inequalities. *J. Convex Anal.*, 9(1):159–183, 2002.
- [43] P. Krejčí and M. Liero. Rate independent Kurzweil processes. *Appl. Math., Praha*, 54(2):117–145, 2009.
- [44] P. Krejčí and T. Roche. Lipschitz continuous data dependence of sweeping processes in bv spaces. *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B*, 15(3):637–650, 2011.
- [45] P. Krejčí and J. Sprekels. Hysteresis operators in phase-field models of Penrose-Fife type. *Appl. Math.*, 43(3):207–222, 1998.
- [46] P. Krejčí and J. Sprekels. Temperature-dependent hysteresis in one-dimensional thermovisco-elastoplasticity. *Appl. Math.*, 43(3):173–205, 1998.
- [47] P. Krejčí and J. Sprekels. Phase-field systems and vector hysteresis operators. In *Free Boundary Problems: Theory and Applications, II (Chiba, 1999)*, pages 295–310. Gakkōtoshō, Tokyo, 2000.
- [48] P. Krejčí and J. Sprekels. On a class of multi-dimensional Prandtl-Ishlinskii operators. *Phys. B*, 306:185–190, 2001.
- [49] P. Krejčí and J. Sprekels. Parabolic regularization of differential inclusions and the stop operator. *Interfaces Free Bound.*, 4:423–435, 2002.
- [50] P. Krejčí and J. Sprekels. Phase-field systems for multi-dimensional Prandtl-Ishlinskii operators with non-polyhedral characteristics. *Math. Methods Appl. Sci.*, 25:309–325, 2002.
- [51] P. Krejčí, J. Sprekels, and U. Stefanelli. Phase-field models with hysteresis in one-dimensional thermo-visco-plasticity. *SIAM J. Math. Anal.*, 34(2), 2002.
- [52] H. Logemann and A. D. Mawby. Extending hysteresis operators to spaces of piecewise continuous functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 282(1):107–127, 2003.
- [53] K. Löschner and M. Brokate. Some mathematical properties of a vector Preisach operator. *Phys. B*, 404:250–253, 2008. Proceedings of the Sixth International Symposium on Hysteresis and Micromagnetic Modeling (HMM-2007).

- [54] K. Löschner-Greenberg. *Vector Preisach Modeling of Magnetic Hysteresis*. PhD thesis, Technische Universität München Zentrum Mathematik, 2008.
- [55] E. Madelung. Über Magnetisierung durch schnellverlaufende Ströme und Wirkungsweise des Rutherford-Macronischen Magnetdetektors. *Ann. Physik IV*, 17:861–890, 1905.
- [56] I. D. Mayergoyz. *Mathematical Models of Hysteresis and their Applications*. Elsevier, second edition edition, 2003.
- [57] M. Miettinen and P. Panagiotopoulos. Hysteresis and hemivariational inequalities: Semilinear case. *J. Global Optim.*, 13:269–298, 1998.
- [58] V. Recupero. On locally isotone rate independent operators. *Appl. Math. Lett.*, 20(11):1156–1160, 2007.
- [59] V. Recupero. Lebesgue-Stieltjes measures and the play operator. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 138:012022, 2008.
- [60] V. Recupero. The play operator on the rectifiable curves in a Hilbert space. *Math. Methods Appl. Sci.*, 31(11):1283–1295, 2008.
- [61] V. Recupero. BV-extension of rate independent operators. *Math. Nachr.*, 282(1):86–98, 2009.
- [62] V. Recupero. Extending vector hysteresis operators. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 268:012024, 2011. Proceedings of the 5th International Workshop on Multi-Rate Processes and Hysteresis (MURPHYS 2010).
- [63] T. Roche. Uniqueness of a quasivariational sweeping process on functions of bounded variation. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 11(2):363–394, 2012.
- [64] W. Rudin. *Functional Analysis*. Tata Mc Graw–Hill, 1989.
- [65] C. Serpico, M. d’Aquino, C. Visone, and D. Davino. A new class of Preisach-type isotropic vector model of hysteresis. *Physica B: Condensed Matter*, 343(1–4):117 – 120, 2004. Proceedings of the Fourth International Conference on Hysteresis and Micromagnetic Modeling (HMM 2003).
- [66] J. Sprekels. Div. Vorträge zum Thema Hysterese-operatoren, 1995-2012.
- [67] J. Sprekels. Private communication. 2011.
- [68] J. Sprekels and P. Krejčí. Phase-field systems for multi-dimensional Prandtl-Ishlinskii operators with non-polyhedral characteristics. *Math. Methods Appl. Sci.*, 25(4):309–325, 2002.
- [69] X. Tan, J. S. Baras, and P. Krishnaprasad. Control of hysteresis in smart actuators with application to micro-positioning. *Systems & Control Letters*, 54(5):483 – 492, 2005.

- [70] A. Visintin. *Differential Models of Hysteresis*, volume 111 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [71] A. Visintin. Six talks on hysteresis. In *Boundaries, interfaces, and transitions (Banff, AB, 1995)*, volume 13 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 207–236. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [72] A. Visintin. Private communication. 2011.
- [73] C. Visone. Hysteresis modelling and compensation for smart sensors and actuators. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 138:012028, 2008. Proceedings of the International Workshop on Multi-Rate Processes and Hysteresis (MURPHYS 2008).
- [74] A. Vladimirov. Characterization of short-memory hysteresis operators. Technical report, Preprint of Cork University, Ireland, 1999.